

יפה בר אור



הנדסת המישור חלק א'

לחטיבת הביניים ולחטיבה העליונה

יפה בר-אור

הנדסת המישור

חלק א

לחטיבת הביניים ולחטיבה העליונה

תוכן העניינים

עמוד

פרק א. מושגים בהנדסה

1. מושגים יסודיים, משפטים יסודיים 1
2. הנקודה והישר 2
3. פעולות בקטעים 2
4. הזווית 3
5. פעולות בזוויות 4
6. סוגי זוויות ותכונותיהן 5
8. תרגילים 8

פרק ב. המשולש

1. המצולע 15
- תרגילים 16
2. המשולש 17
- תרגילים 20
3. חפיפת משולשים 24
- תרגילים 31
4. תכונות משולש שווה-שוקיים 42
5. תכונות משולש שווה-צלעות 44
6. הדלתון 45
- תרגילים 48

פרק ג. יחסים בין צלעות וזוויות במשולש

1. יחסים בין זוויות 58
2. יחסים בין צלעות וזוויות במשולש 61
3. שימושים 64
4. יחסים בין צלעות במשולש 66
- תרגילים 68

פרק ד. מקבילים

1. זוויות מתאימות, מתחלפות, חד-צדדיות 78
2. ישרים מקבילים 80
- תרגילים 85
3. תוצאות 94
- תרגילים 100

פרק ה. המרובעים

107	1. המקבילית
114	2. המלבן
117	3. המעוין
120	4. הריבוע
121	תרגילים
152	5. הטרפז
157	תרגילים

פרק ו. קטע אמצעים

165	1. קטע אמצעים במשולש
168	2. קטע אמצעים בטרפז
170	תרגילים

פרק ז. נקודות מיוחדות במשולש

179	1. מרכז המעגל החוסם משולש
181	2. מרכז המעגל החסום במשולש
183	3. תיכונים, מרכז הכובד של המשולש
184	4. הנקודה המצוין הרביעית
186	תרגילים
191	נוסחאות, משפטים ובעיות חשובות
200	רשימת סמלים וקיצורים

יעוץ מדעי
ד"ר א. קליין
מאוניברסיטת בר-אילן

יעוץ פדגוגי
ד"ר ש. בר-אור

עריכה גרפית
נורית מנור

עיצוב עטיפה
הפיל הורוד

איורים
ריקרדו וי.ב.

תודתי נתונה
לגב' נעמי צ'יזיק , על הארותיה הפדגוגיות,
ולעמיתותי לעבודה ברנינג קלרה וקנטור סופיה
על הערותיהן המועילות.

כל הזכויות שמורות למחברת.

1990

פרק א: מושגים בהנדסה

1. מושגים יסודיים, משפטים יסודיים

החפצים סביבנו עשויים חומר ולכן הם בעלי שלושה ממדים. ההנדסה חוקרת את הצורות השונות של החפצים. אין היא מטפלת בחלק החומרי של החפץ, אלא בצורה התאורטית המופשטת שלו. למשל, הנקודה החומרית היא הסימן שמשאיר הגיר על הלוח או העפרון על הדף. במסגרת ההנדסה, אין לנקודה ממדים כלל.

באותו אופן **מתעלמת ההנדסה מעוביה של שורה או מעוביו של דף נייר. לשורה היא מיחסת אורך בלבד ואילו לדף הנייר, שני ממדים - אורך ורוחב, למרות שבמציאות יש אפשרות לבטא את עובי השורה ועובי הנייר.**

הגדרת מושגים נעשית באופן כזה **שכל מושג חדש מוסבר באמצעות מושג קודם**, שהגדרתו מתבססת על מושג קודם, וכך, כמבנה עשוי רבדים. על כן, ברור שבבסיסו של מבנה זה קיימת מערכת מושגים שאותם אין אפשרות להגדיר באמצעות מושגים קודמים, **כי לא קיימים מושגים קודמים. אלו המושגים היסודיים.**

הנקודה והישר הם מושגי היסוד של הנדסת המישור.

כאמור, חוקרת ההנדסה את תכונות הצורות השונות. את תוצאות החקירה הזאת מביעים בעזרת **משפטים** הבנויים אף הם מרבדים.

בבסיס קיים משפט, או מספר משפטים שאותם אין על מה לבסס. אלו **משפטים יסודיים או אכסיומות**. האכסיומות מתקבלות כהנחות יסודיות, ללא הוכחה.

דוגמה לאכסיומה: "דרך שתי נקודות עובר קו ישר אחד ויחיד."

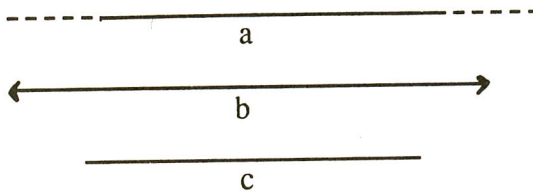
2. הנקודה והישר

נהוג לסמן את הנקודה באות לטינית גדולה לידה.

A •

• B

הקו הישר או בקיצור – הישר מסומן באות לטינית קטנה, הרשומה לצידו.



הנקודות בהמשך ישר a , או החיצים על ישר b , רומזים על כך שאפשר להמשיך את הישר בשני הכיוונים, אך אין הכרח לשרטט אותם, כמו בישר c .

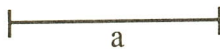
שני המושגים הקשורים לקו הישר הם הקרן והקטע.



הקרן – חלק הישר המוגבל בצד אחד.
סימונו - אות גדולה בנקודה המגבילה ואות קטנה בכיוון הלא מוגבל. למשל, קרן Am .



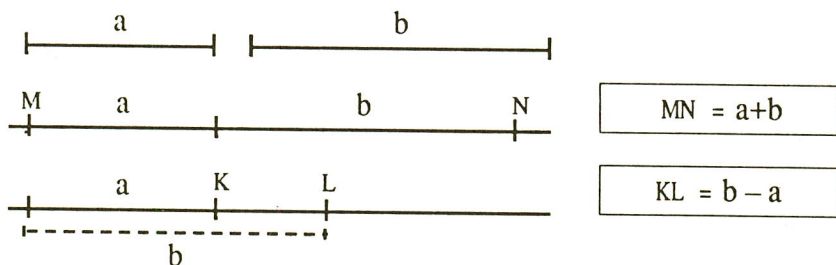
הקטע – חלק הישר המוגבל בשני צידיו.
סימונו - שתי אותיות גדולות בקצותיו.
למשל, קטע AB או BA .
אפשרות שניה של סימון - אות קטנה ליד הקטע.



3. פעולות בקטעים

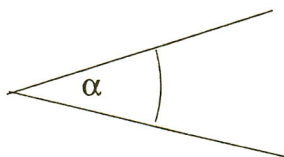
ניתן לבצע פעולות בקטעים בעזרת חישוב או באמצעות שרטוט.
בשיטה השניה נעזרים **בסרגל ובמחוגה**. כאשר שתי זרועות המחוגה מונחות בקצות קטע, מראה מיפסק המחוגה את אורך הקטע.

ניתן לחבר את הקטעים AB ו-CD בכך שנשרטט אותם על אותו ישר, זה בהמשכו של זה.
ניתן להחסיר קטעים, באם נניח אותם זה על גבי זה.



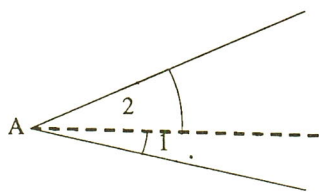
4. הזווית

הזווית היא צורה הנדסית הנוצרת ע"י שתי קרניים, שיוצאות מנקודה אחת. הנקודה היא קודקוד הזווית, והקרניים - שוקיה. בין שוקי הזווית נוהגים לשרטט קשת, שמרכזה בקודקוד הזווית. בעזרת קשת זו מודדים את גודל הזווית. נרחיב על כך בהמשך החומר, במסגרת המעגל.

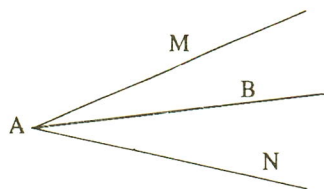


אפשרויות לסימון זווית:

— ע"י אות יוונית הנרשמת בתוך הקשת (α — אלפא, β — בטא, γ — גאמא, δ — דלתא, ε — אפסילון)



— ע"י אות לטינית גדולה הנרשמת ליד קודקוד הזווית. רושמים $\hat{A}$ או $\sphericalangle A$ אם באותו קודקוד A, מופיעות שתי זוויות, אפשר לציין $\sphericalangle A_1$, $\sphericalangle A_2$.



— ע"י שלוש אותיות גדולות, אחת בקודקוד ושתיים על השוקיים: רושמים $\sphericalangle BAM$ או $\sphericalangle BAN$

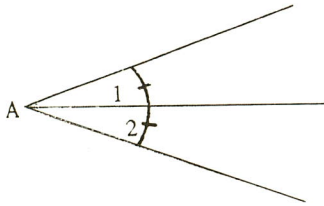


שים לב!

אות הקודקוד – A מופיעה תמיד באמצע.



בסימון זווית ע"י אותיות יווניות,
אין צורך להוסיף את סמל הזווית $\angle$;
מספיק לציין α ולא $\angle \alpha$.



חוצה - זווית - זוהי קרן היוצאת מקודקוד
הזווית ומחלקת את הזווית לשתי זוויות שוות:
 $\angle A_1 = \angle A_2$.

5. פעולות בזוויות

פעולות בזוויות - כמו בקטעים - ניתן לבצע בשתי דרכים:
בדרך חישובית ובעזרת שרטוט.

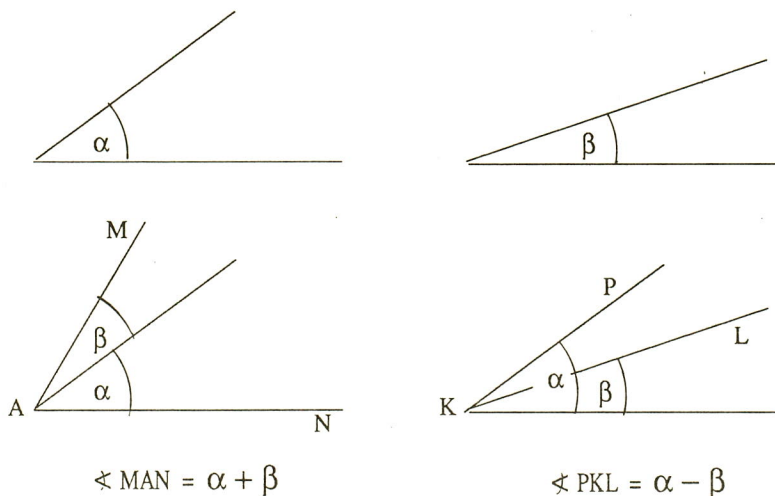
5.1 פעולות חישוב בזוויות

יחידת המידה של זווית היא המעלה – 1° .
המעלה היא החלק ה-360 של זווית ששוקיה מתלכדות אחרי תנועה סיבובית
שלמה. כל מעלה מכילה 60 דקות.
 $1^\circ = 60'$

דוגמאות

1. $33^\circ 46' + 13^\circ 50' = 46^\circ 96' = 47^\circ 36'$
כלומר את $96'$ הפרדנו למעלה אחת ולשלושים ושש דקות.
2. $48^\circ 48' - 32^\circ 12' = 79^\circ 60' - 32^\circ 12' = 80^\circ$
כלומר במקום 80° רשמנו $1^\circ + 79^\circ$ ואת המעלה פרטנו לדקות.
3. $151^\circ 18' = 150^\circ 78' = 75^\circ 39' \cdot 2$
4. $38^\circ 36' = 76^\circ 72' : 2 = 77^\circ 12' : 2$

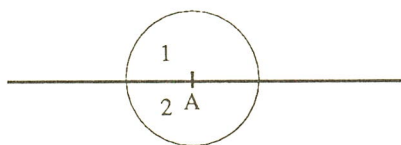
5.2 בפעולות בזוויות בעזרת שרטוט נעזרים במחוגה ובסרגל.
 כאשר מחברים שתי זוויות α ו- β משרטטים אותן זו בהמשכה של זו, כאשר שוק אחת משותפת והקודקוד משותף; כאשר מחסרים - משרטטים אותן זו בתוך זו, כפי שמודגם בשרטוט:



6. סוגי זוויות ותכונותיהן

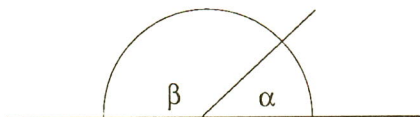
6.1 זווית שטוחה

שוקיה מונחות על ישר אחד.
 כל הזוויות השטוחות שוות זו לזו.
 הזוויות A_1 ו- A_2 , הן זוויות שטוחות; ביחד הן מרכיבות זווית בת 360° , לכן כל זווית שטוחה היא בת 180° .



6.2 זוויות צמודות

זוויות בעלות שוק אחת משותפת, ושתי השוקיים האחרות מונחות על ישר אחד.
 α ו- β הן זוויות צמודות.



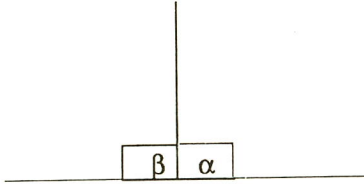
משפט:



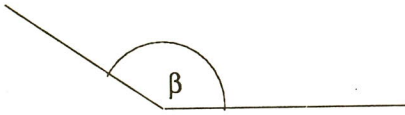
סכום זוויות צמודות שווה ל- 180° .

הנימוק: זוויות צמודות יוצרות זווית שטוחה, שגודלה 180° .

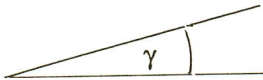
6.3 זווית ישרה, קהה, חדה.



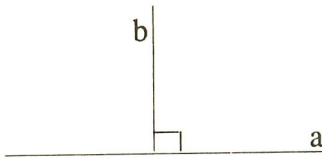
זווית ישרה - אם שתי זוויות צמודות - שוות, נקראת כל אחת מהן זווית ישרה. גודלה - 90° . זווית ישרה מסומנת באות d (droit).
בשרטוט, היא מצויינת בעזרת זווית ישרה נוספת במקום בקשת.



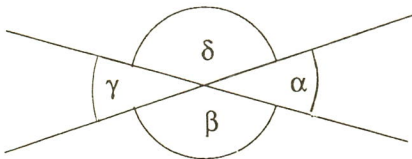
זווית קהה - זווית גדולה מזווית ישרה: $\beta > 90^\circ$.



זווית חדה - זווית קטנה מזווית ישרה: $\gamma < 90^\circ$.



מהגדרת הזווית הישרה מתקבל המושג - **ישרים מאונכים**, שהם ישרים היוצרים זווית ישרה.
הסמל לישרים מאונכים הוא: $\perp$
 $a \perp b$



6.4 זוויות קודקדיות
נוצרות כאשר שני ישרים נחתכים; כל שתיים שאינן צמודות, נקראות קודקדיות.
 α ו- γ או β ו- δ הן קודקדיות.



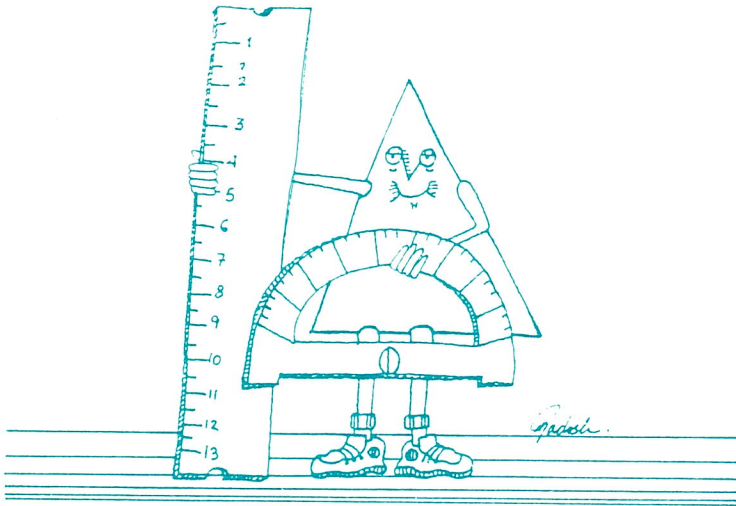
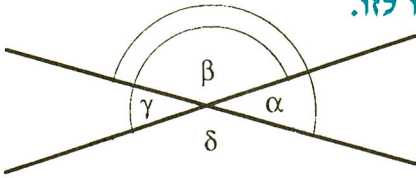
משפט:

זוויות קודקודיות שוות זו לזו.

הנימוק: α ו- γ שוות זו לזו,

כי שתיהן משלימות

את β ל- 180° .

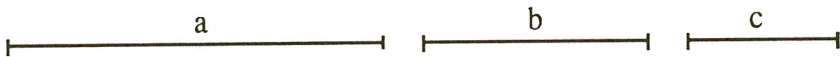


תרגילים

פעולות בקטעים

1. בשרטוט נתונים שלושה קטעים שאורכיהם:

$$a = 5 \text{ ס"מ}, b = 3 \text{ ס"מ}, c = 2 \text{ ס"מ}$$

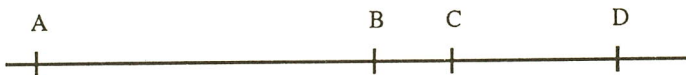


חשב את אורך הקטע המתקבל מהפעולה הבאה.

$a + 2c$	- ד	$a + b + c$	- א
$2b + 3c$	- ה	$a - b + c$	- ב
$a - 2c$	- ו	$b + c - a$	- ג

2. אורכי הקטעים המשוורטטים על הישר הם:

$$AB = 7 \text{ ס"מ} \quad BC = 1 \text{ ס"מ} \quad CD = 3 \text{ ס"מ}$$



ציין את הקטע המתקבל מהפעולות הבאות וחשב את אורכו.

$BD - BC + AC$	- ד	$AB + BC + CD$	- א
$AD - AC + BC$	- ה	$AC - AB + CD$	- ב
$AC - AB + (BD - BC)$	- ו	$AC + CD - AB$	- ג

3. בשרטוט נתונים 4 קטעים: $AB = BC$, $CD = DE$ וכן:



א - $DE = 2$ ס"מ, $AD = 8$ ס"מ, חשב את BC .
 ב - $AE = a$, מה גודלו של BD .

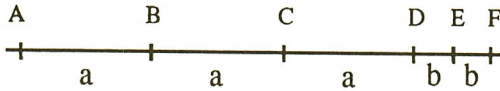


4. נתונים 4 קטעים

$$PT = TK, MN = NP$$

וכן נתון $TK = a$, $MN = 2PT$

מה גודל הקטעים: PK , MN , MP , NT , MK .



5. התייחס לנתונים שבשרטוט וציין קטע שגודלו

$$a + 2b \quad \text{ז} -$$

$$2a \quad \text{ח} -$$

$$2a + b \quad \text{ד} -$$

$$2a + 2b \quad \text{ה} -$$

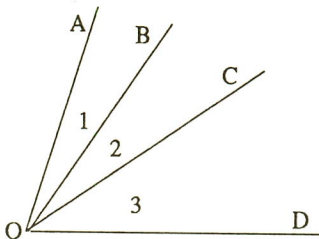
$$3a + 2b \quad \text{ו} -$$

$$3a \quad \text{א} -$$

$$2b \quad \text{ב} -$$

$$a + b \quad \text{ג} -$$

פעולות בזוויות



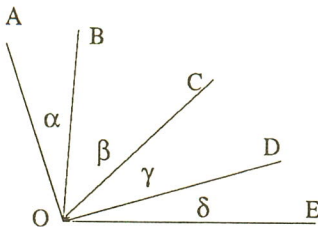
6. נתונות 3 זוויות $\angle O_1$, $\angle O_2$, $\angle O_3$

העזר בזוויות אלה כדי לבטא את:

$$\angle AOC \quad \text{א} -$$

$$\angle AOD \quad \text{ב} -$$

$$\angle BOD \quad \text{ג} -$$



7. התייחס לזוויות שבשרטוט ובטא את

הזוויות המתקבלות בסעיפים הבאים

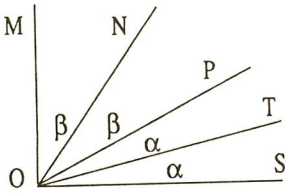
באמצעות 3 אותיות ($\angle AOB$, וכו').

$$\alpha + \beta \quad \text{א} -$$

$$\beta + \gamma \quad \text{ב} -$$

$$\alpha + \beta + \gamma \quad \text{ג} -$$

8. העזר בשרטוט וציין זווית שגודלה:

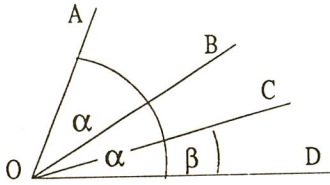


$$\begin{array}{ll} \alpha + \beta & \text{א -} \\ 2\alpha + \beta & \text{ב -} \\ 2\beta + \alpha & \text{ג -} \\ 2\alpha + 2\beta & \text{ד -} \end{array}$$

9. בטא את ההפרשים הבאים

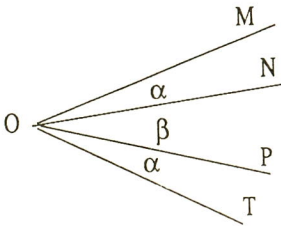
בעזרת זווית אחת:

$$\begin{array}{ll} \alpha - \beta & \text{א -} \\ 2\alpha - \beta & \text{ב -} \end{array}$$



10. בטא בעזרת α ו- β

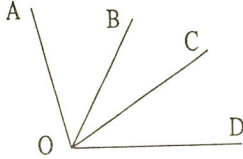
את הזוויות NOT MOT ו-MOP.
מה הקשר בין שתי
הזוויות האחרונות?



11. בשרטוט נתון:

$$\angle AOC = \angle BOD$$

$$\angle AOB = \angle COD \quad \text{הוכח:}$$

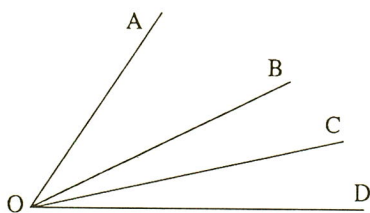


12. חשב

$$\begin{array}{ll} \text{א -} & 15^\circ 27' + 31^\circ 3' \\ \text{ב -} & 40^\circ 25' + 59^\circ 35' \\ \text{ג -} & 22^\circ 17' + 53^\circ \\ \text{א -} & 38^\circ 38' + 46^\circ 55' \\ \text{ב -} & 92^\circ 28' - 2^\circ 18' \\ \text{ג -} & 57^\circ 20' - 40^\circ 30' \end{array}$$

13. נתונות שתי זוויות $\alpha = 46^\circ 38'$, $\beta = 13^\circ 44'$
חשב זווית השווה ל:

$$\begin{array}{lll} \alpha + \beta & \text{א -} & 3\beta - \delta \\ \alpha - \beta & \text{ב -} & 90^\circ - \alpha - \eta \\ 2\alpha & \text{ג -} & \alpha : 2 - \iota \\ \beta : 2 & \text{ז -} & \\ \beta : 4 & \text{ח -} & \\ 3\alpha - 2\beta & \text{ט -} & \end{array}$$



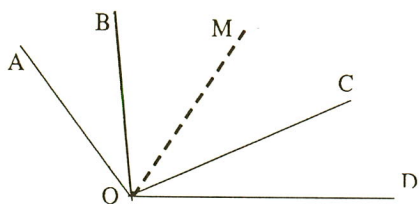
14. BO הוא חוצה הזווית AOD

CO - חוצה הזווית BOD

$$\angle AOD = 57^\circ 20'$$

חשב את הזווית AOB,

ו- AOC, COD



15. בשרטוט נתון

$$\angle AOC = \angle BOD$$

MO חוצה הזווית BOC.

הראה כי MO חוצה גם

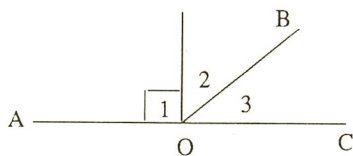
את הזווית AOD.

סוגי זוויות ותכונותיהן

16. נתונות שתי זוויות $\alpha = 52^\circ 36'$, $\beta = 37^\circ 24'$,
ציין את סוג הזווית (שטוחה, ישרה, קהה, חדה) המתקבלת בסעיפים

הבאים:

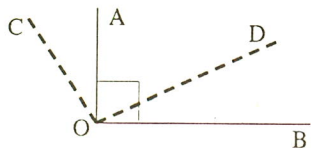
ד - 2β	א - $\alpha - \beta$
ה - $2\beta - \alpha$	ב - $\alpha + \beta$
ו - $2\alpha + 2\beta$	ג - 2α



17. O נקודה על הישר AC.

$$\angle O_2 = \angle O_3, \angle O_1 = 90^\circ$$

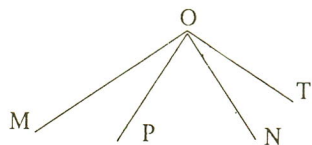
חשב את AOB



18. בשרטוט נתון $\angle AOB = 90^\circ$

$$\angle COA = \angle DOB$$

מה גודל הזווית COD.



19. בשרטוט נתון $PO \perp OT$, $MO \perp ON$

הוכח כי $\angle MOP = \angle NOT$

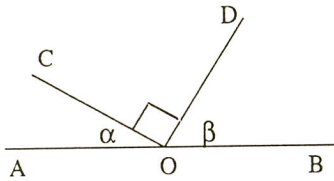
20. O נקודה על הישר AB.

$$\angle COD = 90^\circ$$

א - קבע את סוג הזווית (קהה, חדה):

$$\angle COB, \angle AOD$$

ב - חשב את הסכום $\alpha + \beta$.



21. נתונה זווית α . חשב את הזווית הצמודה לה, כאשר α מקבלת את הערכים הבאים:

א - 30°	ג - $104^\circ 12'$
ב - $72^\circ 20'$	ד - 90°

22. α ו- β הן זוויות צמודות. חשב את גודלן כאשר:

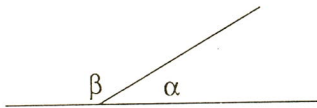
א - β גדלה מ- α ב- 36°

ב - β גדולה פי 2 מ- α

ג - α מהווה $1/3$ מ- β

ד - $\alpha = X + 10^\circ, \beta = 3X - 50^\circ$

ה - $\alpha = 2X - 15^\circ, \beta = X + 45^\circ$



23. חשב את גודלן של שתי זוויות צמודות, כאשר היחס ביניהן הוא:

א - 4 : 5	ב - 7 : 11	ג - 2 : 3
-----------	------------	-----------

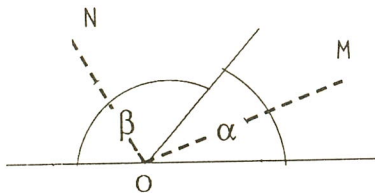
24. זווית מסוימת מהווה $3/5$ מהצמודה לה. חשב את הזווית.

25. α ו- β הן זוויות צמודות.

OM - חוצה הזווית α ,

ON - חוצה הזווית β ,

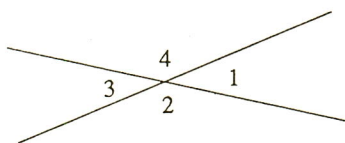
חשב את הזווית NOM.



26. נתונות 3 זוויות α, β ו- γ שסכומן 360° . סמן את הזווית הצמודה ל- α

ב- α_1 (ובהתאמה β_1 ו- γ_1) והראה כי

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 180^\circ$$

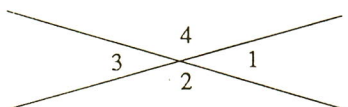


27. בשרטוט שני ישרים נחתכים:

חשב בכל סעיף את 3 הזוויות האחרות.

א - $\angle 1 = 30^\circ$ ג - $\angle 1 = 90^\circ$

ב - $\angle 2 = 135^\circ$ ד - $\angle 3 = 0.5d$

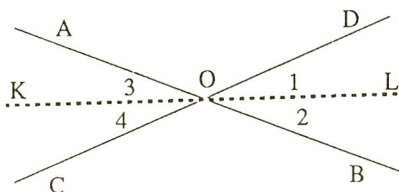


28. חשב את 4 הזוויות, כאשר

א - $\angle 1 = 2X$ $\angle 3 = X + 50^\circ$

ב - $\angle 1 = X + 50^\circ$ $\angle 3 = 3X$

ג - $\angle 2 = 100^\circ - X$ $\angle 4 = 2X + 85^\circ$



29. AB ו-CD נחתכים ב-O. הישר

KL עובר דרך O ונתון:

$\angle 1 = \angle 2$

הוכח: $\angle 3 = \angle 4$

נסח במילים את אשר הוכחת.

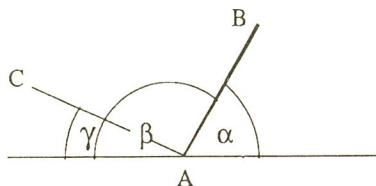
30. הוכח: החוצים של 2 זוויות קודקדיות יוצרים זווית שטוחה.

31. הוכח כי החוצים של שתי זוויות צמודות מאונכים זה לזה.

32. נתונות שתי זוויות צמודות α ו- β . הזווית בין חוצי הזוויות α ו- β נחצות

ע"י השוק המשותפת.

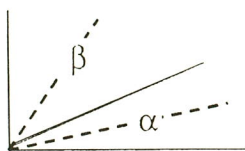
חשב את α ואת β .



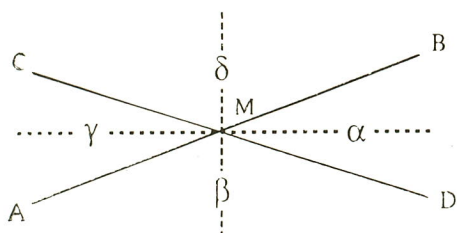
* 33. על השוק המשותפת AB, של שתי זוויות

צמודות α ו- β , העלו אנך AC.

מצא את הקשר בין α ו- γ .



34. נתונות שתי זוויות α ו- β שיוצרות יחד זווית ישרה.
הוכח כי הזווית בין החוצים של α ושל β היא בת 45° .



35. שני ישרים AB ו-CD נחתכים בנקודה M.
הוכח כי, החוצים של שני זוגות הזוויות הקדקודיות α, γ ו- β, δ מאונכים זה לזה.

תשובות

- (1 א-10; ב-4; ג-0; ד-9; ה-12; ו-לא יתכן;
(2 א, ד-11; AD=11; ב, ג, ה, ו-4; BD=4; 3 א-3; ב-0,5a;
(4 2a, 4a, 3a, 6a; 5 א-AD; ב-FD; ג-CE;
ד-BE; ה-BF; ו-AF; ז-CF; ח-AC, BD;
(6 א- $\angle O_1 + \angle O_2$; ב- $\angle O_1 + \angle O_2 + \angle O_3$; ג- $\angle O_2 + \angle O_3$;
(7 א- $\angle AOC$; ב- $\angle BOD$; ג- $\angle AOD$; ד- $\angle COE$; ה- $\angle BOE$;
ו- $\angle AOE$; 8 א- $\angle NOT$; ב- $\angle NOS$; ג- $\angle MOT$; ד- $\angle MOS$;
(9 א- $\angle BOC$; ב- $\angle AOC$; 10 $\alpha + \beta, 2\alpha + \beta, \alpha + \beta$;
(12 א- $46^\circ 30'$; ב- 100° ; ג- $23^\circ 10'$; ד- $85^\circ 33'$; ה- $94^\circ 46'$;
ו- $16^\circ 50'$; 13 א- $60^\circ 22'$; ב- $32^\circ 54'$; ג- $93^\circ 16'$; ד- $41^\circ 12'$;
ה- $43^\circ 22'$; ו- $23^\circ 19'$; ז- $6^\circ 52'$; ח- $3^\circ 26'$; ט- $112^\circ 26'$;
(14 $28^\circ 40', 14^\circ 20', 43^\circ$; 16 א-חדה; ב-ישרה; ג-קהה;
ד-ה-חדה; ו-שטוחה; 17 135° ; 18 90° ;
(20 א-קהות; ב- 90° ; 21 א- 150° ; ב- $107^\circ 40'$;
ג- $75^\circ 48'$; ד- 90° ; 22 א- $108^\circ, 72^\circ$; ב- $120^\circ, 60^\circ$;
ג- $135^\circ, 45^\circ$; ד- $115^\circ, 65^\circ$; ה- $95^\circ, 85^\circ$; 23 א- $100^\circ, 80^\circ$;
ב- $110^\circ, 70^\circ$; ג- $108^\circ, 72^\circ$; 24 $67.5^\circ, 112.5^\circ$; 25 90° ;
(27 א- $150^\circ, 30^\circ$; ב- $150^\circ, 45^\circ$; ג- 90° ; ד- $1.5d$;
(28 א- $80^\circ, 100^\circ$; ב- $105^\circ, 75^\circ$; ג- $95^\circ, 85^\circ$;
(32 90° ; 33 $\alpha + \gamma = 90^\circ$.

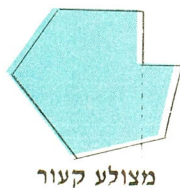
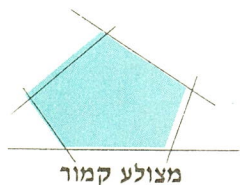
פרק ב: המשולש

המשולש שייך לקבוצה רחבה של צורות הנדסיות – **המצולעים**. לפיכך, נבהיר מספר הגדרות ותכונות הקשורות למושג מצולע, ועל רקע זה נלמד את המשולש.

1. המצולע

מצולע הוא קו שבור, סגור. הקטעים של הקו השבור הם צלעות במצולע, נקודות החיבור שלהם – קודקודים. מספר הקודקודים במצולע שווה למספר צלעותיו.

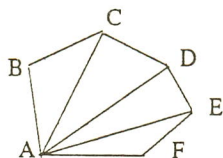
מצולע משוכלל – מצולע שכל צלעותיו שוות זו לזו וזוויותיו שוות זו לזו.



קיימים שני סוגי מצולעים: **קמור** ו**קעור**.

במצולע קמור, המשכי כל הצלעות, לשני הכיוונים, נמצאים מחוץ למצולע.
במצולע קעור, קיימת לפחות צלע אחת, שהמשכה חותך את המצולע עצמו.

אלכסון הוא קטע המחבר שני קודקודים, שאינם נמצאים על אותה צלע. מספר האלכסונים היוצאים מקודקוד אחד, במצולע בעל n צלעות, הוא $n - 3$.



את הקודקוד A של המצולע, אין אפשרות לחבר, לא לעצמו, ולא לשני הקודקודים

הסגר

הסמוכים לו B ו-F. לכן, מתוך n קודקודי המצולע, נותרו
 n - 3 קודקודים, שאפשר לחבר לנקודה A.

מספר האלכסונים במצולע בעל n צלעות – $\frac{n(n-3)}{2}$

מכל קודקוד אפשר לבנות (n - 3) אלכסונים.
 מ-n קודקודים יצאו (n - 3) n אלכסונים.
 כל אלכסון ספרנו פעמיים (מכל קצה), לכן מספר האלכסונים
 יהיה $\frac{n(n-3)}{2}$

הסבר

שם המצולע ניתן לפעמים לפי **מספר הצלעות**:
 שלוש צלעות - משולש, ארבע צלעות - מרובע, וכו'.
 לא תמיד נוח לכנות מצולע באופן כזה. לכן, אומרים למשל -
 מצולע בעל 15 צלעות.

תרגילים

1. אלו מצולעים הינך מכיר, שניתן לכתובם עפ"י מספר צלעותיהם.
 (כמו במשולש – 3 צלעות).
2. כמה אלכסונים אפשר לבנות מקודקוד אחד של מצולע בעל 3, 4, 5, 6, או 10 צלעות?
3. כמה אלכסונים אפשר להעביר במצולע בעל 4, 5, 6, 9, ו-12 צלעות?

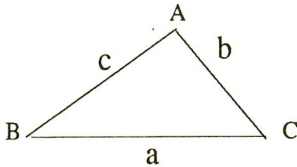
תשובות

- (1) משולש, מרובע, מחומש, משושה, מתומן (8 צלעות);
 (2) 0, 1, 2, 3, 7; (3) 2, 5, 9, 27, 54;

2. המשולש

2.1 המשולש הוא מצולע בעל שלוש צלעות.

למשולש אין אלכסונים, כי כל קודקודיו מחוברים ע"י צלעות. סימון המשולשים נעשה באמצעות שלוש אותיות לטיניות גדולות, המציינות את קודקודיו, בתוספת הסמל Δ , למשל ΔABC .

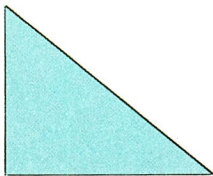


מול כל קודקוד, נמצאת צלע, המסומנת באותה אות, כמו הקודקוד אך קטנה: מול קודקוד A - צלע a, וכי. זוויות המשולש שומרות על סימון זווית, כפי שצינו כבר. (באות אחת - $\sphericalangle C$, או בשלוש אותיות - $\sphericalangle BCA$).

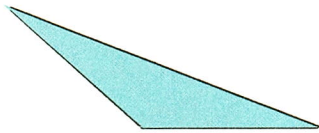
2.2 מיון משולשים נעשה לפי צלעות ולפי זוויות.

במיון לפי זוויות מבחינים בשלושה סוגי משולשים:

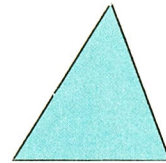
- ישר-זווית** – שבו זווית אחת ישרה; הצלעות המהוות את שוקי הזווית הישרה נקראות ניצבים, והצלע שמול הזווית הישרה - יתר.
- קהה-זווית** – שבו זווית אחת קהה.
- חד-זווית** – שכל זוויותיו חדות.



ישר-זווית



קהה-זווית

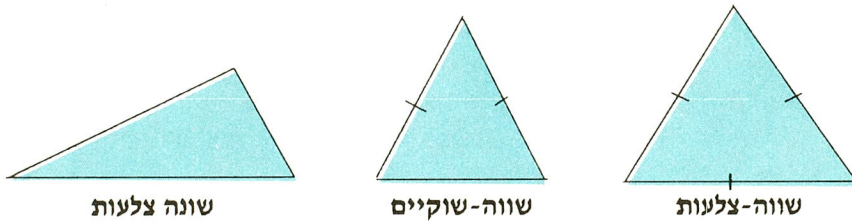


חד-זווית

גם במיון לפי צלעות מבחינים בשלושה סוגי משולשים:

- שונה צלעות** – שבו שלוש הצלעות שונות זו מזו.
- שווה-שוקיים** – שבו שתי צלעות שוות זו לזו. צלעות אלה נקראות שוקיים, והזווית שביניהן - זווית הראש. הצלע השלישית נקראת - בסיס. הזוויות לידה - זוויות הבסיס.

ג. שווה-צלעות – שבו שלוש הצלעות שוות זו לזו.



אם בבעיה מטפלים במשולש מיוחד, מבחינת צלעות או זוויות, מציינים זאת.

אם לא צוין דבר בנושא זה, יש לשרטט משולש חד-זווית ושונה צלעות – משולש כלשהו.

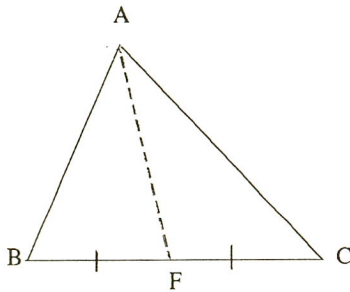


2.3 קטעים מיוחדים במשולש

תיכון – קטע המחבר קודקוד המשולש עם אמצע הצלע שמולו.

סימונו - m_a , אם הוא מגיע לצלע a , m_b - לצלע b וכיו'. אם בבעית הוכחה, נתון תיכון AF , מציינים זאת כך:

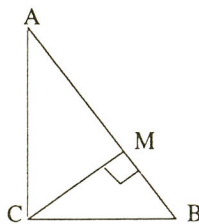
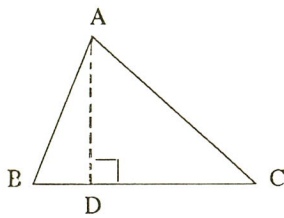
$$BF = FC$$



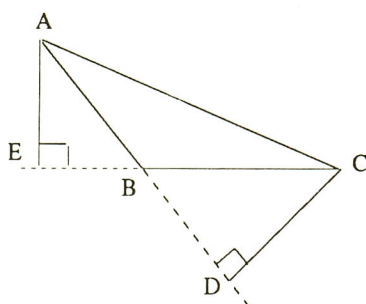
גובה – קטע היוצא מקודקוד המשולש ומאונך לצלע שמולו.

סימונו - h_a, h_b, h_c .

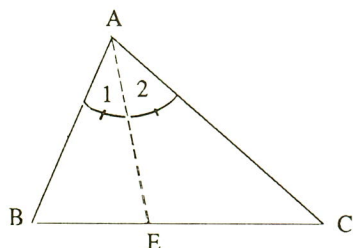
כדי לציין ש- AD הוא גובה, כותבים $AD \perp BC$.



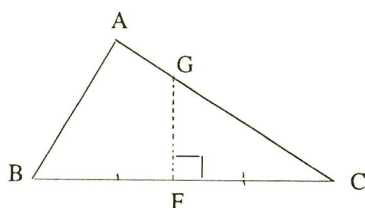
אם המשולש ABC הוא ישר-זווית, משמשים הניצבים כגבהים זה לזה, שכן $AC \perp BC$ ואילו CM הוא הגובה ליתר.



אם המשולש הוא קהה-זווית, $\angle B > 90^\circ$ הגבהים משני הקודקודים האחרים, A ו- C, יוצאים מחוץ למשולש: $AE \perp BC$, $CD \perp AB$.

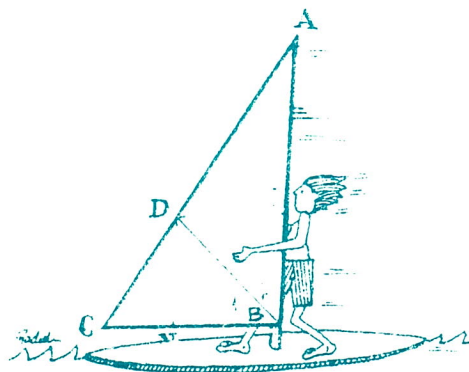


חוצה-זווית – הוגדר כבר, אך כאן הוא מוגבל באורכו עד למפגש עם הצלע. למשל, AE הוא חוצה-זווית ומציינים זאת כך: $\angle BAE = \angle EAC$ או $\angle A_1 = \angle A_2$. סימונו: l_a - ח.ז. A. (l_c, l_b) .

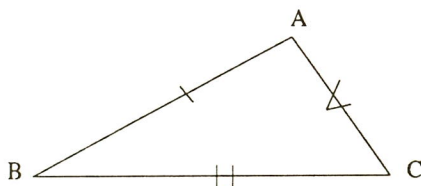


אנך אמצעי – אנך לצלע בנקודת האמצע שלה. אין לו סימון מיוחד; כדי לציין ש- FG הוא אנך אמצעי, כותבים: $FG \perp BC$ ו- $BF = FC$.

האנך האמצעי הוא הקטע היחיד מבין הארבעה, שאינו יוצא מקודקוד המשולש. בהמשך נראה באיזה תנאים יגיע האנך האמצעי לקודקוד המשולש.



תרגילים



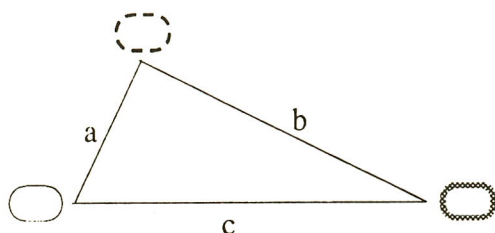
1. באיזו אות תציין את הצלע

המסומנת ב:

✓ - א

|| - ב

| - ג

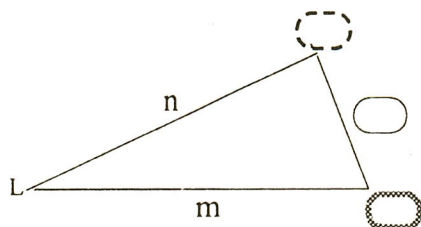


2. איזו אות תרשום ב:

○ - א

⊖ - ב

⦿ - ג

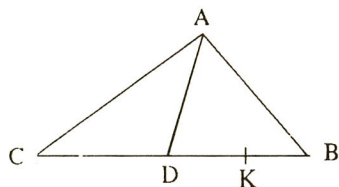


3. השלם את החסר בשרטוט -

⊖ - א

○ - ב

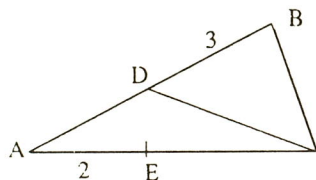
⦿ - ג



4. AD תיכון לצלע BC ונתון:

· $BK = 2$ ס"מ , $BC = 10$ ס"מ

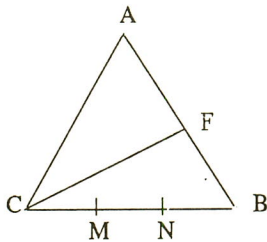
חשב את אורך הקטע DK .



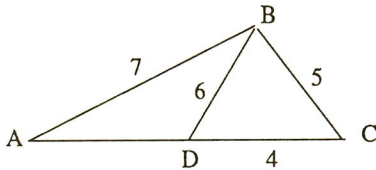
5. CD תיכון לצלע AB של משולש

שווה-שוקיים ABC (BC - הבסיס) התייחס

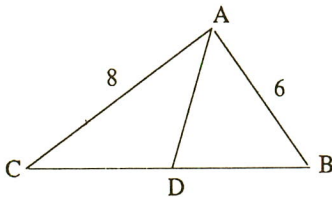
לנתון בשרטוט וחשב את אורך הקטע EC .



6. CF תיכון לצלע AB של משולש שווה-צלעות ABC. M ו-N מחלקות את BC לשלושה קטעים שווים - 4 ס"מ כל אחד.
חשב את האורך של AF.

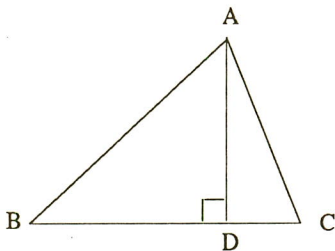


7. BD תיכון ל-AC. התייחס לנתונים שבשרטוט וחשב את היקף $\triangle ABC$ ו- $\triangle ABD$.

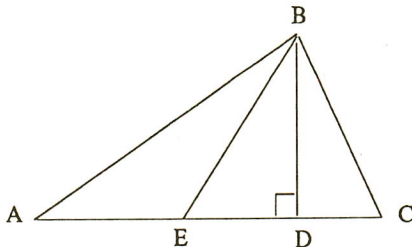


8. AD תיכון ל-BC. העזר בנתונים שבשרטוט וחשב בכמה גדול היקף המשולש ACD מהיקף המשולש ABD.

גובה

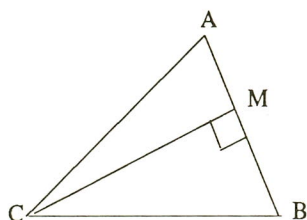


9. AD גובה ל-BC במשולש ABC. הוא יוצר שני משולשים נוספים ADC ו-ABD. השלם:
AD גובה לצלע במשולש ADC.
AD גובה לצלע במשולש

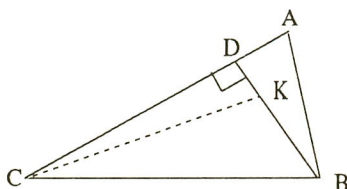


10. BD גובה לצלע AC במשולש ABC. הקטע BE מחלק את המשולש ABC לשני משולשים: משולש חד-זווית BEC ובו BD גובה לצלע ומשולש קהה-זווית ABE ובו BD גובה לצלע

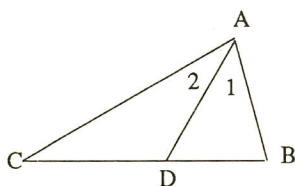
11. התייחס לבעיה הקודמת ומצא 2 משולשים נוספים שבהם BD הוא גובה.
ציין את הצלע ש-BD הוא גובהה.



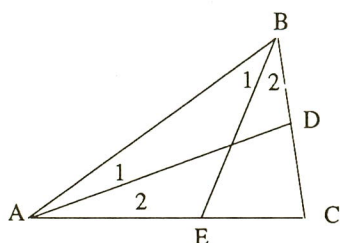
12. CM גובה לצלע AB במשולש ABC.
CM גובה ל-..... במשולש CMB.
הגובה CM במשולש CMB הוא
הגובה לצלע CM במשולש AMC
הוא



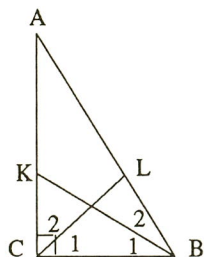
13. BD גובה ל-AC במשולש ABC.
K נקודה על BD.
הגובה לצלע BK במשולש CKB
הוא



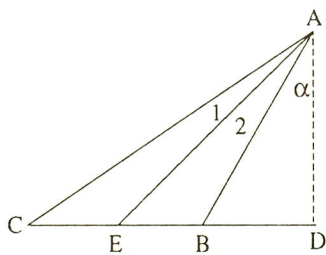
14. AD חוצה הזווית A ונתון:
 $\angle C = \angle A_1$, $\angle A_2 = 36^\circ$, $\angle B = \angle A$
חשב את זוויות המשולש ABC.



15. AD חוצה הזווית A. BE חוצה הזווית B.
סכום הזווית A ו-B הוא 120°
נתון: $\angle C = \angle A_2 + \angle B_2$
א - חשב את הזווית C.
ב - הראה כי $\angle C = \angle A_1 + \angle B_1$



16. $\triangle ABC$ משולש ישר זווית ($\angle C = 90^\circ$). BK
ו-CL הם חוצי הזוויות B ו-C,
בהתאמה; $\angle B_2 = 34^\circ$
א - חשב את הזוויות: B_1 , C_1
ב - חשב את הסכומים: $\angle B + \angle C_2$
 $\angle B_1 + \angle C_1$

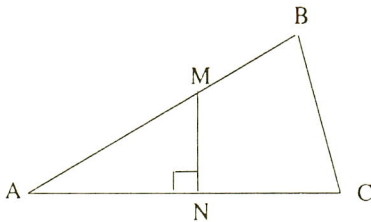


17. AD-הגובה לצלע BC במשולש ABC - יוצר עם הצלע AB זווית α השווה לזווית A של המשולש. AE חוצה הזווית A.

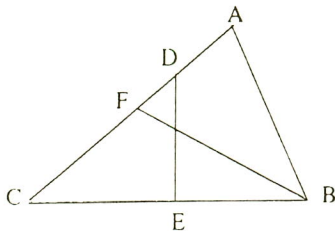
$$\angle A = 50^\circ$$

חשב את גודל הזוויות: $\angle A_1$, $\angle EAD$
 $\angle A_2 + \angle D$

אנך אמצעי



18. משולש שווה-שוקיים ($AB = AC$). MN הוא אנך אמצעי לצלע AC. נתון: $NC = 5$ ס"מ, $AM = 6$ ס"מ. חשב את MB.



19. משולש שווה-שוקיים ABC (C קודקוד הראש). DE אנך אמצעי לצלע BC, BF תיכון לצלע AC, AD שווה ל- $\frac{1}{3}$ מ-AC. $BE = 6$ ס"מ. חשב את: FD, AD, CF, BC.

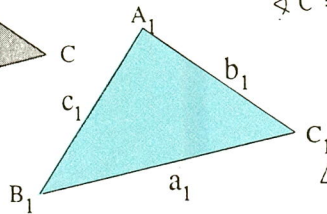
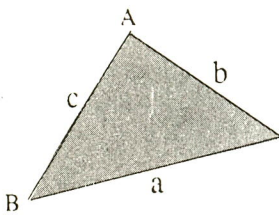
תשובות

3 (4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; BD ; DC
 4 (10 ; AE, EC ; 11 ; ABD, BDC ; 12 ; AM, MB, MB
 13 (14 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19 ; 2, 4, 6, 12
 א- $45^\circ, 68^\circ$; ב- $79^\circ, 113^\circ$; ג- $115^\circ, 75^\circ, 25^\circ$; ד- 58° ; ה- $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$; ו- $2, 4, 6, 12$

3. חפיפת משולשים

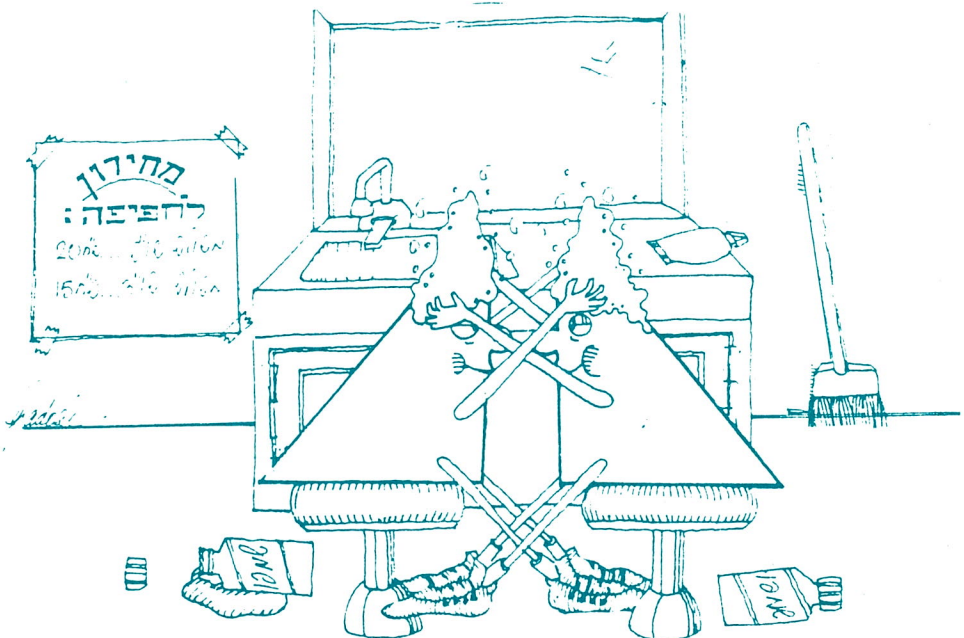
3.1 שתי צורות נקראות **חופפות**, אם בהיותן מונחות זו על גבי זו, רואים (מצד אחד, וגם מהצד השני) צורה אחת בלבד. הגדרה זו נכונה גם לגבי משולשים. באופן מעשי, שני משולשים יקראו חופפים, כאשר ששת גורמיו, של משולש אחד שווים בהתאמה לששת גורמיו של המשולש השני, כלומר, לכל צלע במשולש אחד, יש צלע שווה לה במשולש השני, ולכל זווית במשולש אחד, יש זווית שווה לה במשולש השני.

מסמנים **חפיפה** באמצעות הסמל $\cong$
אם בשני המשולשים המפורטים מתקיים:



$$\begin{array}{ll} \angle A = \angle A_1 & a = a_1 \\ \angle B = \angle B_1 & b = b_1 \\ \angle C = \angle C_1 & c = c_1 \end{array}$$

$$\Delta ABC \cong \Delta A_1 B_1 C_1 \quad \text{אז:}$$



3.2 משפטי החפיפה מאפשרים להראות ששני משולשים חופפים, ע"ס שלושה שוויונים של גורמים בלבד (במקום שישה). דבר זה מקל עלינו הוכחת חפיפה של משולשים.

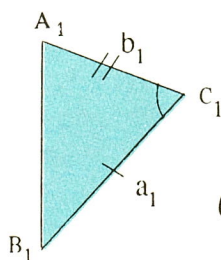
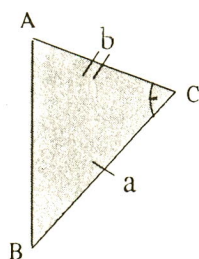
צביעת כל שני גדלים שווים, בשני המשולשים בצבע משותף, נותנת רמז חזותי לחפיפת המשולשים. על כן, מומלץ להעזר בצבעים בתרגילים שבהם נעשה שימוש במשפטי החפיפה. בהעדר צבעים, אפשר להשתמש בסימון משותף על גדלים שווים (קו קטן על צלעות שוות או על קשתות של זוויות שוות, וכו').



משפט חפיפה ראשון I



אם שתי צלעות במשולש אחד, שוות בהתאמה לשתי צלעות במשולש אחר, והזווית הכלואה בין שתי הצלעות במשולש אחד, שווה לזווית הכלואה בין שתי הצלעות בשני המשולשים חופפים.



הדגמה:

$$\begin{aligned} a &= a_1 & \text{אם} \\ b &= b_1 \\ \angle C &= \angle C_1 \end{aligned}$$

$$\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1 \quad (\text{מ.ח. I})$$

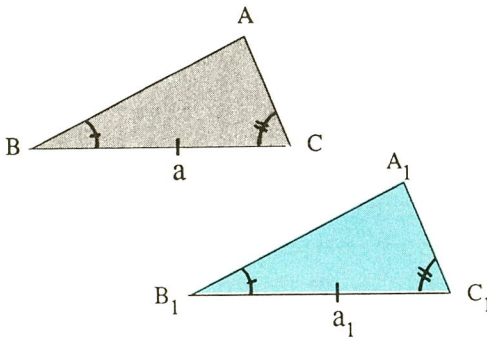
כאשר משתמשים במשפט זה לצורך הוכחה, מציינים בקיצור:
מ.ח. I – משפט חפיפה ראשון, או **צ.ז.צ.** – צלע, זווית, צלע (שתי צלעות והזווית הכלואה ביניהן).



משפט חפיפה שני - II

אם צלע במשולש אחד שווה לצלע במשולש שני, ושתי הזוויות ליד הצלע, במשולש אחד, שוות בהתאמה לשתי הזוויות המתאימות במשולש השני, המשולשים חופפים.

בקיצור: **מ.ת. II** - משפט חפיפה שני, או **ז.צ.ז.** - זווית, צלע, זווית
צלע ושתי זוויות שלידה.



הדגמה:

$$a = a_1 \quad \text{אם}$$

$$\angle B = \angle B_1$$

$$\angle C = \angle C_1$$

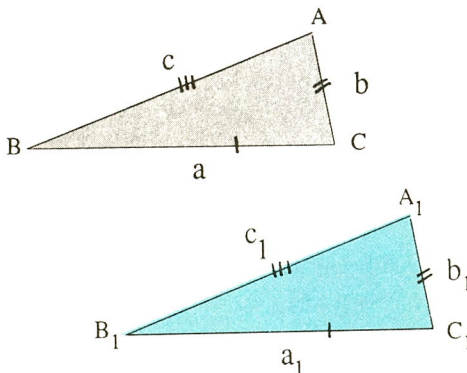
$$\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1 \quad (\text{מ.ת. II})$$



משפט חפיפה שלישי - III

אם שלוש הצלעות במשולש אחד, שוות בהתאמה לשלוש הצלעות במשולש השני, שני המשולשים חופפים.

בקיצור: **מ.ת. III** - משפט חפיפה שלישי, או **צ.צ.צ.** - צלע, צלע, צלע (שלוש צלעות).



הדגמה:

$$a = a_1 \quad \text{אם}$$

$$b = b_1$$

$$c = c_1$$

$$\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1 \quad (\text{מ.ת. III})$$

בהמשך, נלמד שני משפטי חפיפה נוספים.

3.3 משפטי חפיפה למשולשים ישרי זווית

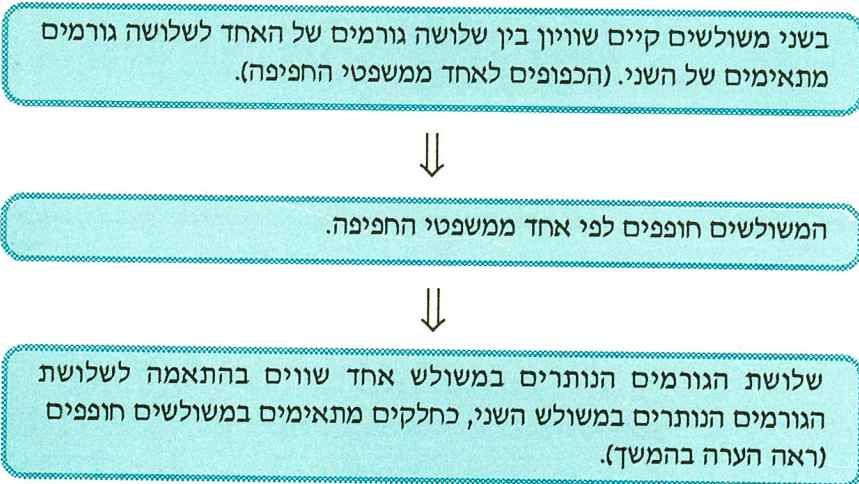
משפטי החפיפה שצוינו לעיל, בתוספת הידיעה שכל הזוויות הישרות שוות, מאפשרים להסיק את המסקנה, ששני משולשים ישרי-זווית חופפים, אם:

- שני ניצבים של האחד שווים בהתאמה, לשני הניצבים בשני (מתאים למ.ח. I).
- אחד הניצבים והזווית החדה לידו, במשולש אחד, שווים בהתאמה לניצב וזווית חדה שלידו בשני (מתאים למ.ח. II).

בהמשך נראה שני משפטי חפיפה נוספים למשולש ישר זווית.

3.4 משפטי חפיפה - תיאור סכימתי

את אשר למדנו בפרק על משפטי החפיפה ניתן לתאר בצורה הסכימתית הבאה:



הסקת המסקנה לגבי "החלקים המתאימים במשולשים החופפים" בעזרת הכלל: במשולשים חופפים מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות, ומול זוויות שוות מונחות צלעות שוות. הסבר נוסף על כלל זה - בפרק ג'.



הסכמה לעיל מהווה בסיס לשיטת פתרון חשובה בהנדסת המישור:
הוכחת שוויון בין קטעים או בין זוויות באמצעות חפיפת משולשים.
אם בבעיה יש להוכיח שוויון בין שני קטעים או שתי זוויות כדאי:

לחפש בשרטוט הבעיה, משולשים
שאליהם שייכים הקטעים או הזוויות הנ"ל.

לבדוק
אם בשני המשולשים שמצאנו,
קיימים שלושה שוויונים בין גורמים מתאימים,
המאפשרים להוכיח, ששני המשולשים חופפים.

להסיק מסקנה (מתוך החפיפה)
שגם הגורם המבוקש, במשולש אחד,
שווה לגורם המתאים לו במשולש השני;
אלה הקטעים או הזוויות
שלגביהם היה צריך להוכיח שוויון.

שים לב!

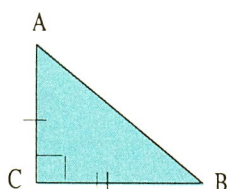


לא תיתכן חפיפת משולשים ללא שוויון בין צלעות - לפחות זוג אחד.

3.5 דוגמאות לפתרון בעיות הוכחה בעזרת משפטי החפיפה

לפני שניגשים לפתרון בעית הוכחה, יש לבדוק היטב את ניסוחה ולהבחין בין נתוני הבעיה, לבין מה שצריך להוכיח.

למשל, בטענה - "משולשים ישרי זווית, השווים בניצביהם, הם חופפים" - החלק הראשון של המשפט, עד המילה "בניצביהם", מכיל את נתוני הבעיה:

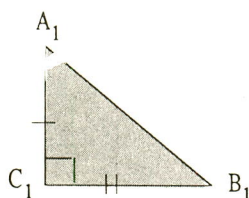


נתון: $\triangle A_1B_1C_1, \triangle ABC$
 $\angle C = 90^\circ, \angle C_1 = 90^\circ$
 $a = a_1, b = b_1$

החלק השני של המשפט "הם חופפים",

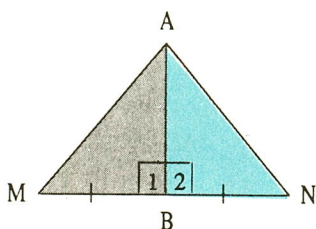
אומר מה צריך להוכיח:

צ"ל: $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$



דוגמה א'

נתון קטע MN האנך האמצעי שלו AB. הוכח: MA = NA.



נתון: קטע MN, $AB \perp MN$, $MB = NB$

צ"ל: $MA = NA$

הוכחה: נבדוק $\triangle ABM$ ו- $\triangle ABN$:

(צלע משותפת) $AB = AB$

(זוויות ישרות) $\angle B_1 = \angle B_2$

(נתון) $MB = NB$

(מ.ח. I) $\triangle ABM \equiv \triangle ABN$

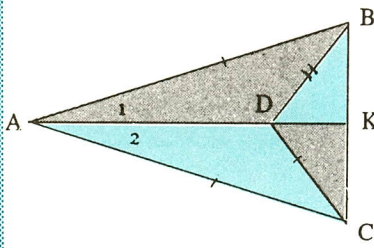
$MA = NA$ (חלקים מתאימים במשולשים חופפים = ח.מ.ב.ח.)

מ.ש.ל.

בסיום פתרון בעיה נהוג לכתוב **מ.ש.ל.** שהוא קיצור ל- "מה שהיה להוכיח".

נתון קטע AD. משני צדי הקטע הזה נרשמו שתי נקודות B ו-C. נתון: $AB = AC$, $BD = CD$. הוכח: $BK = KC$.

נתון	קטע AD, $BD = CD$, $AB = AC$.
צ"ל	$BK = KC$



הוכחה	נבדוק $\triangle ABD$ ו-$\triangle ACD$ $AB = AC$ (נתון) $AD = AD$ (צלע משותפת) $BD = DC$ (נתון) $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (מ.ח. III) $\angle A_1 = \angle A_2$ (ח.מ.ב.ח.)
-------	---

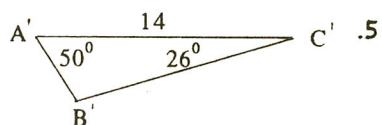
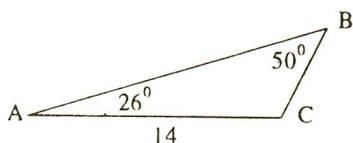
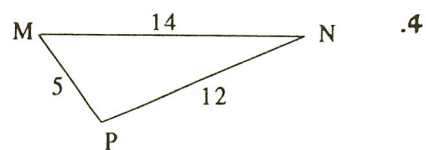
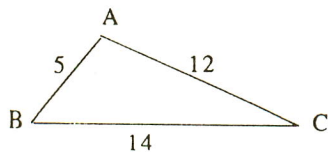
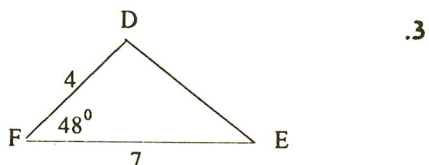
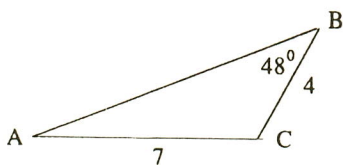
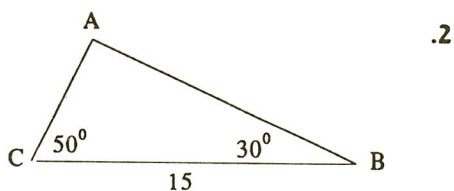
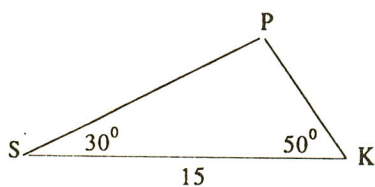
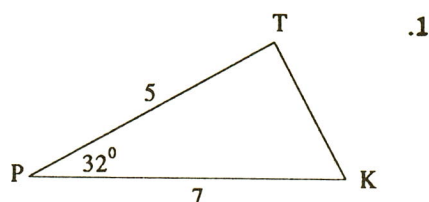
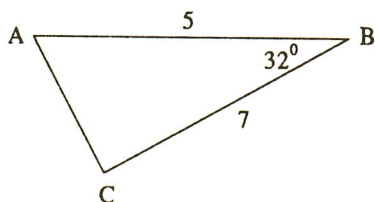
נשתמש במסקנה האחרונה כדי להוכיח חפיפה של המשולשים

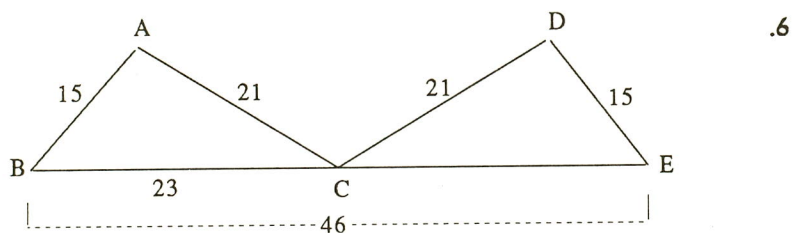
	$\triangle ABK$ ו- $\triangle ACK$
	$AB = AC$ (נתון)
	$AK = AK$ (צלע משותפת)
	$\angle A_1 = \angle A_2$ (הוכחנו)
	$\triangle ABK \cong \triangle ACK$ (מ.ח. I)
	$BK = CK$ (ח.מ.ב.ח.)

מ.ש.ל.

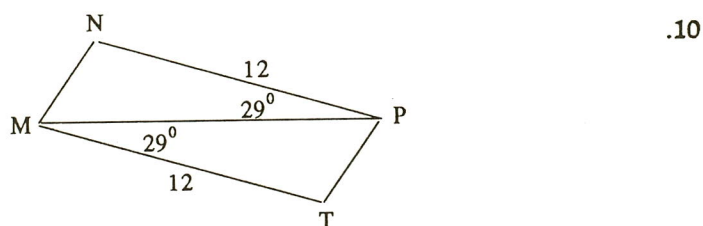
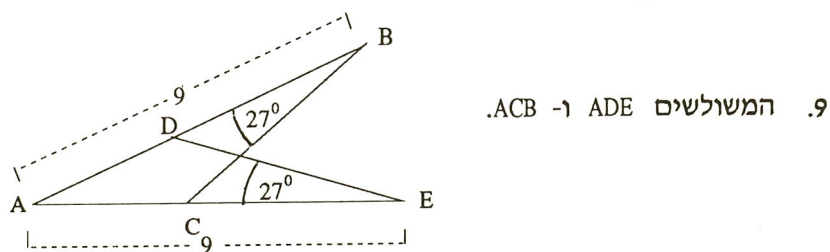
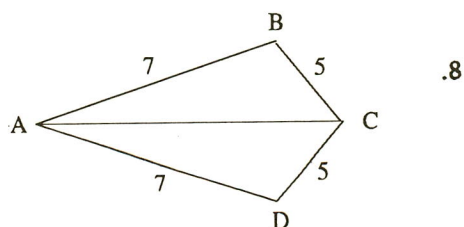
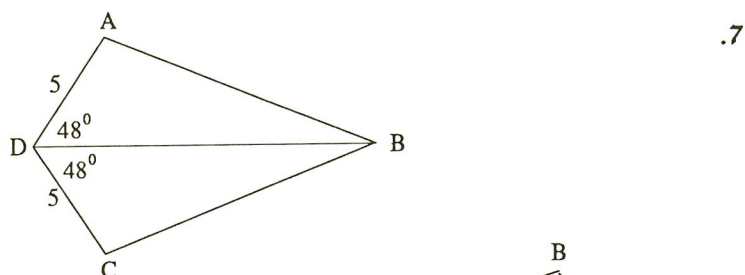
תרגילים

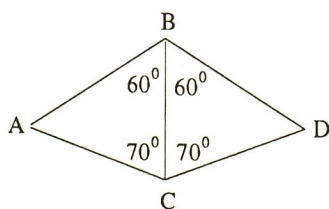
בכל אחד מהתרגילים 1 - 6 משורטטים זוגות משולשים ובכל אחד מהם רשומים מספר נתונים.
קבע, אם המשולשים חופפים. (ציין את משפט החפיפה).



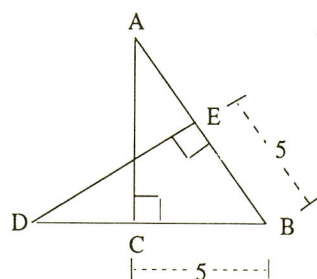


בתרגילים 12 - 7 משורטטים זוגות משולשים ובהם מספר נתונים (הרשומים עליהם) וגם גודל משותף. מהו הגודל המשותף בכל זוג. הראה שהמשולשים חופפים וציין את משפט החפיפה.



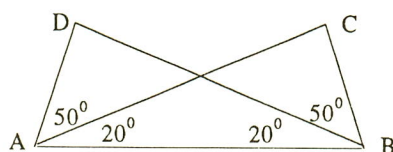


11.

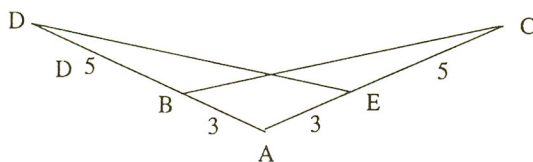


12. המשולשים ABC ו-DBE.

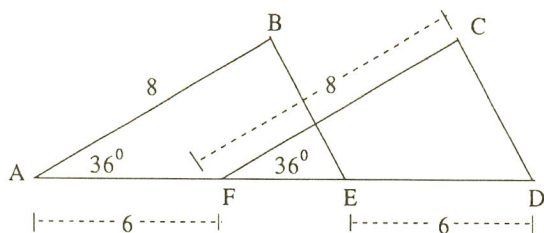
בתרגילים 13 - 15 זוג משולשים. בכל אחד מהשרטוטים רשומים מספר נתונים. העזר בהם כדי להוכיח את המבוקש בתרגיל.



13. הוכח שהמשולשים ABC ו-ABD חופפים.

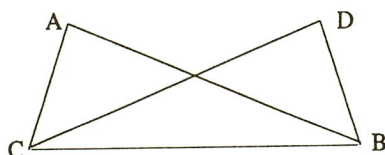


14. הוכח שהמשולשים ABC ו-ADE חופפים.



15. הוכח שהמשולשים ABE ו-FCD חופפים.

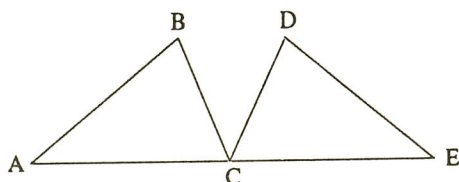
בכל אחד מהתרגילים 16 - 32 רשומים נתוני הבעיה ("נתון") וכן רשום מה שעליך להוכיח (צ"ל = צריך להוכיח).
במהלך ההוכחה, ציין בשרטוט את הגדלים השווים ע"י סימון משותף או צבע משותף. באופן כזה תוכל לזהות ביתר קלות את המשולשים החופפים. נמק כל שלב בהוכחה.



16. נתון: $AC = DB$

$\angle ACB = \angle DBC$

צ"ל: $\triangle ABC \cong \triangle DCB$

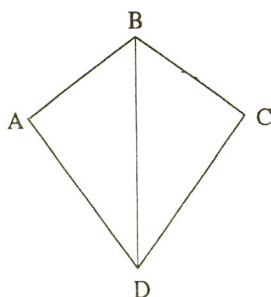


17. נתון: $BC = DC$

$AC = CE$

$\angle ACD = \angle BCE$

צ"ל: $\triangle ABC \cong \triangle DEC$



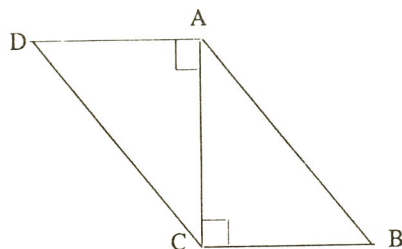
18. נתון: $AD = DC$

$\angle ADB = \angle BDC$

צ"ל: א - $\triangle ABD \cong \triangle CBD$

ב - $AB = BC$

ג - $\angle BAD = \angle BCD$



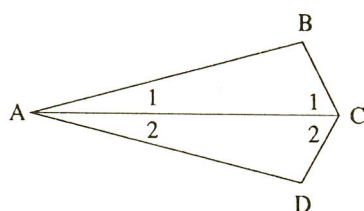
19. נתון: $AD \perp AC$

$BC \perp AC$

$AD = BC$

צ"ל: $CD = AB$

20. האם תוכל להסיק מפתרון התרגיל הקודם שהזוויות DCB ו-DAB שוות זו לזו. נמק!

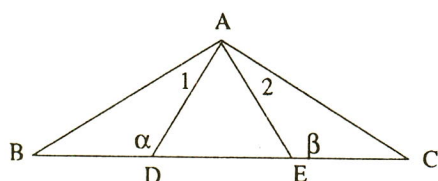


21. נתון: $\angle A_1 = \angle A_2$

$\angle C_1 = \angle C_2$

$\angle B = \angle D$ צ"ל:

$BC = CD$



22. נתון: $AD = AE$

$\angle A_1 = \angle A_2$

$\alpha = \beta$

$\triangle ABE \cong \triangle ACD$ צ"ל:

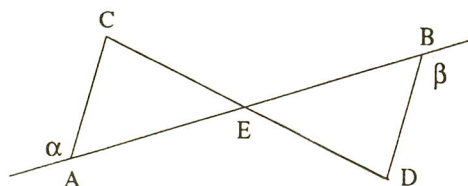
23. ראה שרטוט של תרגיל 22.

נתון: $AB = AC$

$\angle B = \angle C$

$\angle BAE = \angle DAC$

צ"ל: $BD = EC$



24. הקטע CD חותך את

AB בנקודה E.

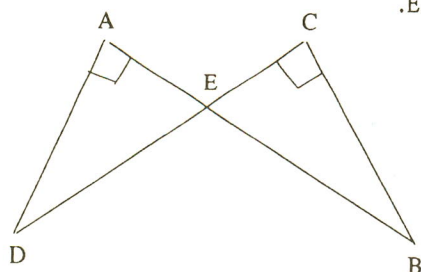
נתון: $\alpha = \beta$

$AE = EB$

צ"ל: $\triangle ACE \cong \triangle BDE$

$CE = ?$ (השלם!)

$AC = ?$ (השלם!)



25. הקטעים AB ו-CD נחתכים בנקודה E.

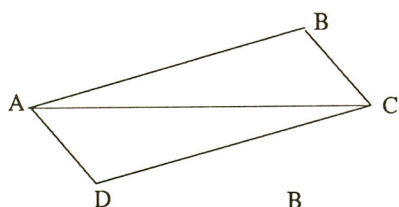
נתון: $AE = CE$

$AD \perp AB$

$BC \perp DC$

$AB = CD$ צ"ל:

$AD = ?$ (השלם!)

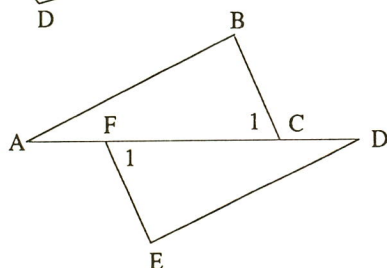


26. נתון: $AB = CD$

$AD = BC$

צ"ל: א - $\triangle ABC \cong \triangle CDA$

ב - $\angle BAC = \angle ACD$



27. נתון: $AB = DE$

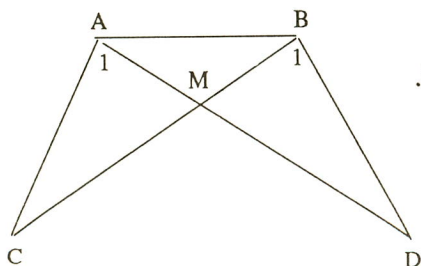
$AF = CD$

$BC = EF$

צ"ל: $\angle C_1 = \angle F_1$

28. הנתון כמו בבעיה הקודמת.

צ"ל: $BD = AE$ (שרטט את הקטעים).



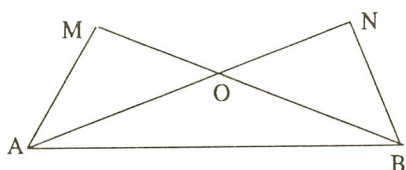
29. הקטעים AD ו-BC נחתכים ב-M.

נתון: $AD = BC$

$AC = BD$

צ"ל: א - $\triangle ABC \cong \triangle ABD$

ב - $\angle A_1 = \angle B_1$



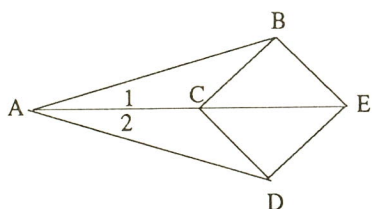
30. נתון: $AM = BN$

$BM = AN$

צ"ל: $MO = NO$

$AO = BO$

(העזר פעמיים בחפיפת משולשים).



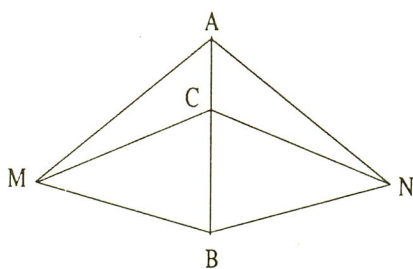
31. נתון: $AB = AD$

$BC = DC$

צ"ל: א - $\angle A_1 = \angle A_2$

ב - $\triangle ABE = \triangle ADE$

כאשר E נמצאת על המשך AC.



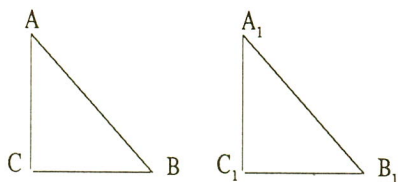
32. C - נקודה על הקטע AB .

נתון: $MA = NA$

$MB = NB$

צ"ל: $MC = NC$

בתרגילים 42 - 33 יש להשלים את החסר בסעיפים: נתון וצ"ל.
אין להוכיח את הבעיות.



33. אם שני משולשים ישרי זווית

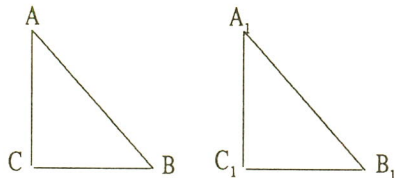
שווים בניצב ובזווית חדה

שלידו, המשולשים חופפים.

נתון: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$

$\angle C = 90^\circ$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (?)

צ"ל: (?)



34. אם שני משולשים ישרי זווית,

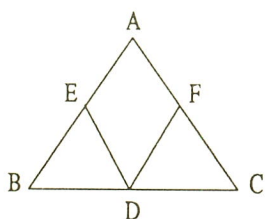
שווים בניצב וביתר - הם

חופפים.

נתון: (?)

צ"ל: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$

הערה: סמן נתונים בשרטוט.



35. אם מחברים את אמצע הבסיס D,

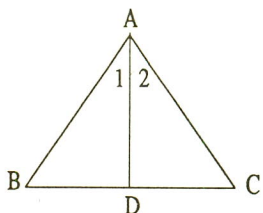
של משולש שווה-שוקים, לאמצעי

השוקיים, נוצרים שני משולשים חופפים.

נתון: $AB = AC$, $\triangle ABC$

$BD = DC$, (?)

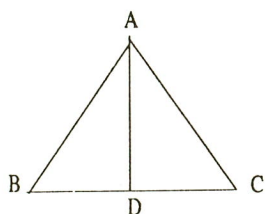
צ"ל: (?)



36. חוצה-זווית הראש, במשולש שווה-שוקיים,
מחלק את המשולש, לשני משולשים חופפים.

נתון: $\angle A_1 = \angle A_2$, (?)

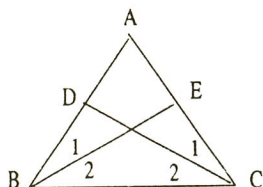
צ"ל: $\triangle ABD \cong \triangle ACD$



37. חוצה-זווית הראש, במשולש שווה-שוקיים, מחלק את הבסיס לשני קטעים שווים.

נתון: $\angle ?$

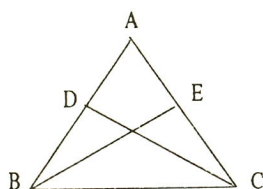
צ"ל: $\angle ?$



38. במשולש שווה-שוקיים, חוצי זוויות הבסיס שווים זה לזה.

נתון: $\angle B_1 = \angle B_2$, $\angle ?$

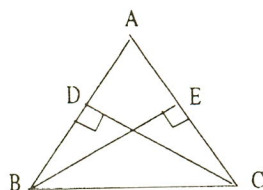
צ"ל: $\angle ?$



39. במשולש שווה-שוקיים, מחלקים חוצי זוויות הבסיס את השוקיים, באופן כזה, שהקטעים על שוק אחת שווים בהתאמה לקטעים על השוק השניה.

נתון: $\angle ?$

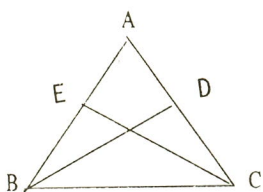
צ"ל: $AE = AD$, $\angle ?$



40. הגבהים לשוקיים במשולש שווה שוקיים יוצרים עם הבסיס שני משולשים חופפים.

נתון: $BE \perp AC$, $\angle ?$

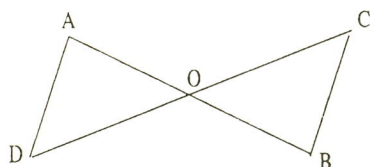
צ"ל: $\angle ?$



41. הוכח: התיכונים לשוקיים, במשולש שווה-שוקיים עם השוקיים זוויות שוות.

נתון: $\angle ?$

צ"ל: $\angle AEC = \angle ADB$, $\angle ?$

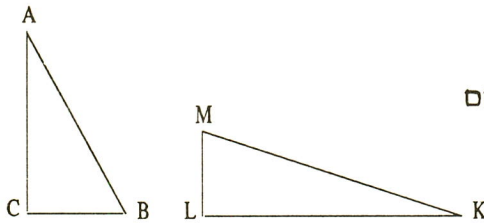


42. אם שני קטעים AB ו-CD, חוצים זה את זה, הרי $AD = BC$.

נתון: $\angle ?$

צ"ל: $\angle ?$

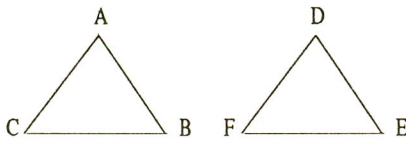
בתרגילים הבאים רשום את הנתון ואת מה שצריך להוכיח - צ"ל והוכח את המבוקש.



43. הוכח: אם הניצבים של שני משולשים ישרי-זווית שווים זה לזה בהתאמה, הרי גם זוויותיהם החדות שוות זו לזו.

$$\angle K = ?$$

$$\angle M = ?$$

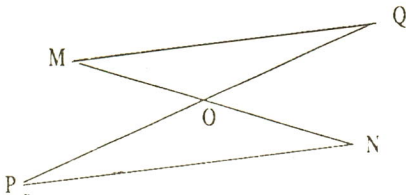


44. המשולשים ABC ו-DEF הם שווים-שוקיים

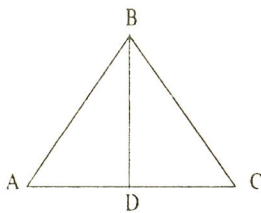
(A ו-D קודקודי הראש)

נתון: $\angle A = \angle D$, $AB = DE$
הוכח כי המשולשים חופפים.

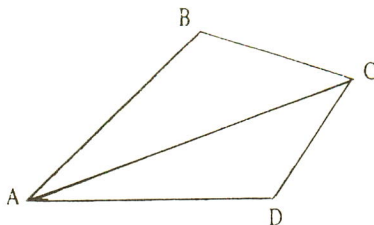
45. הוכח: אם שני משולשים ישרי זווית שווים בניצב אחד והזווית החדה שלידו, המשולשים חופפים.



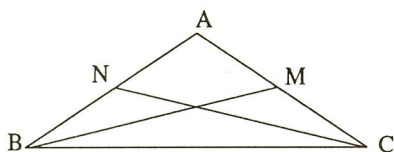
46. הוכח: אם שני קטעים MN ו-PQ חוצים זה את זה, הרי הקטעים MQ ו-PN שווים זה לזה.



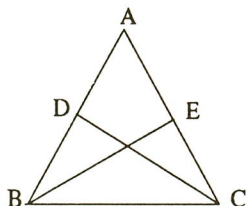
47. הוכח: התיכון לבסיס במשולש שווה-שוקיים מחלק אותו לשני משולשים חופפים.



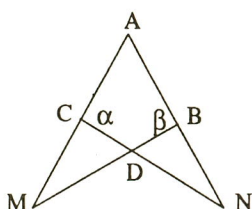
48. הוכח: אם האלכסון AC במרובע ABCD חוצה את 2 זוויותיו, הרי שוות שתי הזוויות האחרות של המרובע. B ו-D



49. הוכח: התיכונים לשוקיים
במשולש שווה-שוקיים, יוצרים
עם השוקיים משולשים חופפים.



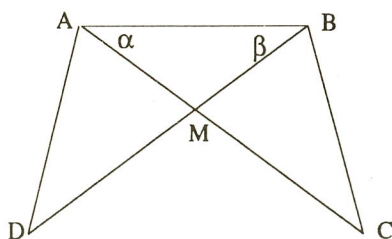
50. $\triangle ABC$ משולש שווה שוקים
($AB = AC$)
על שוקי המשולש הקצו קטעים
שווים $BD = CE$
הוכח: $\angle ADC = \angle AEB$



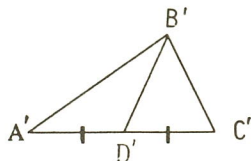
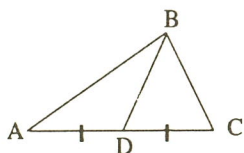
51. על שוקי הזווית A, היקצו
שני קטעים שווים, $AB = AC$ ובנקודות
B ו-C בנו שתי זוויות שוות $\alpha = \beta$.
הוכח: $BM = CN$
 $BN = CM$

52. בתנאי הבעיה הקודמת
הוכח: $\triangle CMD \cong \triangle BND$

53. הוכח: אם בבעיה 51 נחבר את D לקודקוד A, הרי הקטע AD יחצה את הזווית A.

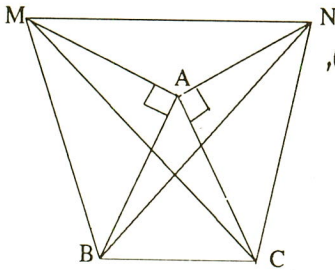


54. שני קטעים AC ו-BD נחתכים
בנקודה M באופן כזה שהם יוצרים
קטעים שווים DM ו-CM וזוויות
שוות D ו-C.
הוכח: $\alpha = \beta$
פתור את הבעיה ללא התייחסות
לקיום משולש שווה-שוקיים.



55. הוכח: במשולשים חופפים,
התיכונים לצלעות שוות,
שוים זה לזה.

56. הוכח: במשולשים חופפים, חוצי זוויות שוות, שווים זה לזה.



* 57. משולש שווה-שוקים (BC - הבסיס),

הקטעים MA ו-NA השווים זה לזה
מאונכים לשוקי המשולש
(ראה שרטוט).

הוכח: א - NB = MC

ב - $\angle MBN = \angle NCM$



** 58. אם U נקודת המפגש של MC

ו- NB שבבעיה הקודמת,

הוכח: א - MO = NO

ב - $\angle MAO = \angle NAO$



* 59. A קודקוד הראש במשולש שווה-שוקיים

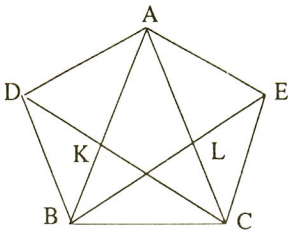
ABC. המשולשים DAC ו- EAB הם ישרי

זווית (בנקודה A)

נתון: DA = AE

הוכח: א - DC = BE

ב - $\angle ECD = \angle DBE$



** 60. בתנאי הבעיה הקודמת הוכח כי

א - AK = AL

ב - $\angle DKA = \angle ELA$

תשובות

- | | | | |
|------------------------|---------------------------|-------------------------|-------------------------|
| (1) צ.ז.צ. | (2) ז.צ.ז. | (3) לא | (4) צ.צ.צ. |
| (5) לא | (6) צ.צ.צ. | (7) צ.ז.צ., BD | (8) צ.צ.צ., AC |
| (9) צ.צ.צ., $\angle A$ | (10) צ.ז.צ., MP | (11) צ.ז.צ., BC | (12) צ.צ.צ., $\angle B$ |
| (13) צ.צ.צ., AD=CB | (14) צ.צ.צ., AC=BD, CE=ED | (15) צ.צ.צ., $\angle A$ | (16) צ.צ.צ., $\angle B$ |

4. תכונות משולש שווה-שוקיים (שו"ש)

4.1 משפט:



במשולש שווה-שוקיים, חוצה-זווית הראש חוצה את הבסיס.

4.2 משפט:



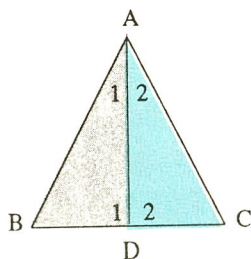
במשולש שווה-שוקיים, חוצה-זווית הראש מאונך לבסיס.

4.3 משפט:



במשולש שווה-שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו.

לשלושת המשפטים הללו הוכחה משותפת:



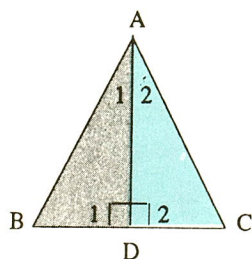
משולש ABC	נתון
$AB = AC$	
$\angle A_1 = \angle A_2$	
$BD = DC$	צ"ל
$AD \perp BC$	
$\angle B = \angle C$	
נבדוק את $\triangle ABD$ ו- $\triangle ACD$	הוכחה
$AD = AD$ (צלע משותפת)	
$\angle A_1 = \angle A_2$ (נתון)	
$AB = AC$ (נתון)	
$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ (לפי מ.ח.י.)	
מהחפיפה נובע:	
$BD = CD$ (ח.מ.ב.ח.)	
$\angle D_1 = \angle D_2 = 90^\circ$ (זוויות צמודות שוות הן זוויות ישרות)	
$\angle B = \angle C$ (ח.מ.ב.ח.)	

מ.ש.ל.

בסיכום, אפשר לאמר:

שבמשולש שווה-שוקיים, חוצה-זווית הראש הוא גם תיכון לבסיס, גם גובה ולכן גם אנך אמצעי. כמו כן, זוויות הבסיס שוות זו לזו.

4.4 משפט: (הפוך)
אם במשולש, אחד מחוצי הזווית הוא גם גובה, המשולש הוא שווה-שוקיים.



נתון	משולש ABC $\angle A_1 = \angle A_2$ $AD \perp BC$
צ"ל	$\triangle ABC$ - שווה-שוקיים
הוכחה	נבדוק $\triangle ABD$ ו- $\triangle ACD$ (נתון) $\angle A_1 = \angle A_2$ (צלע משותפת) $AD = AD$ (נתון) $\angle D_1 = \angle D_2$ (מ.ח. II) $\triangle ABD \cong \triangle ACD \Leftarrow$ (ח.מ.ב.ח.) $AB = AC \Leftarrow$

מ.ש.ל.

4.5 משפט: (הפוך)
אם במשולש, אחד הגבהים הוא גם תיכון, אזי המשולש הוא שו"ש. הוכח!



4.6 משפט: (הפוך)
אם במשולש, שתי זוויות שוות זו לזו, אזי המשולש הוא שווה-שוקיים.



למשפט זה נחזור בפרק על קשרים בין צלעות וזוויות במשולש.

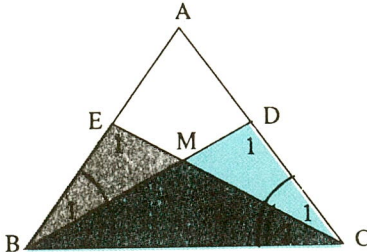
שים לב!



אם בבעיה נתון משולש שווה-שוקיים ABC, בסעיף "נתון" יש לרשום רק $AB = AC$. אין לרשום בסעיף זה, אף לא אחת מתכונותיו, (למשל $\angle B = \angle C$). תכונות אלה רשמים בסעיף "הוכחה", רק במידה שמשתמשים בהן.

דוגמה לבתרון בעיה

במשולש שווה ABC ($AB = AC$), נפגשים חוצי-הזוויות BD ו- CE בנקודה M .
הוכח: (1) $EB = DC$ (2) $EM = MD$.



נתון	$AB = AC$, $\triangle ABC$ $\angle C_1 = \angle C_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$
------	--

צ"ל	$EB = DC$ (1) $EM = MD$ (2)
-----	--------------------------------

הוכחה	במשולשים EBC ו- DCB :
-------	---------------------------

	$BC = BC$ (צלע משותפת)
--	---------------------------

	$\angle B = \angle C$ (ז. בסיס שוות)
--	---

	$\angle C_2 = \angle B_2$ (חצאי זוויות בסיס שוות)
--	--

	$\triangle EBC \cong \triangle DCB \Leftarrow$ (מ.ח. II)
--	---

	$EB = DC \Leftarrow$ (ח.מ.ב.ח.)
--	------------------------------------

מ.ש.ל. 1

נדון כעת ב- $\triangle EMB$ ו- $\triangle MDC$

	$EB = DC$ (הוכח קודם)
--	--------------------------

	$\angle E_1 = \angle D_1$ (נובע מחפיפת המשולשים שבחלק הראשון)
--	--

	$\angle B_1 = \angle C_1$ (חצאי זוויות הבסיס)
--	--

	$\triangle EMB \cong \triangle MDC \Leftarrow$ (צלע ושתי זוויות שלידה)
--	---

	$EM = MD \Leftarrow$ (ח.מ.ב.ח.)
--	------------------------------------

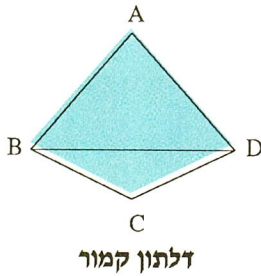
מ.ש.ל. 2

5. תכונות משולש שווה-צלעות (שו"צ)

משולש שו"צ הוא מקרה פרטי של משולש שווה-שוקיים. על כן, התכונות הקיימות במשולש שו"צ לגבי חוצה-זווית הראש, קיימות במשולש שווה-צלעות לגבי כל חוצי-הזוויות.

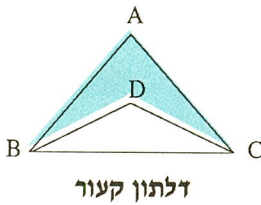
כלומר, חוצי הזוויות במשולש שו"צ הם גם תיכונים, גם גבהים, ולכן גם אנכים אמצעיים. כמו-כן, שלוש הזוויות במשולש שווה צלעות שוות זו לזו.

6. דלתון



6.1 הדלתון הוא מרובע המורכב משני משולשים שווים-שוקיים, בעלי בסיס משותף.

הקטע, המחבר את הקודקודים הראשיים של המשולשים שווים-השוקיים (קודקודי הראש של הדלתון), נקרא **אלכסון ראשי**.

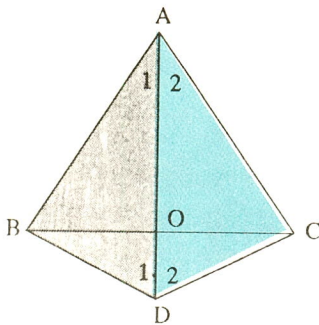


כבכל מצולע, פרט למשולש, יתכנו שני סוגים של דלתון: **קמור וקעור**.

6.2 משפט הדלתון:



האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את הבסיס המשותף ומאונך לו.



נוכיח את המשפט במקרה של דלתון קמור:

נתון	מרובע ABCD
	$AB = AC$
	$BD = DC$
צ"ל	$\angle D_1 = \angle D_2$ $\angle A_1 = \angle A_2$
	$BO = OC$
	$AD \perp BC$
הוכחה	במשולשים ACD ו-ABD : $AB = AC$ (נתון) $DB = DC$ (נתון) $AD = AD$ (צלע משותפת) $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (שלוש צלעות) $\Leftarrow$ מהחפיפה נובע: $\angle A_1 = \angle A_2$ (ח.מ.ב.ח.) $\angle D_1 = \angle D_2$ (ח.מ.ב.ח.)

הוכחנו, ש- AO חוצה-זווית הראש במשולש ABC , שבו $AB = AC$. לפי תכונות משולש שוויון, AO הוא גם תיכון וגם גובה לבסיס, כלומר:

$$BO = CO$$

$$AD \perp BC$$

מ.ש.ל.

אפשר לנסח משפט הפוך למשפט הדלתון בצורה הבאה:

6.3 משפט :



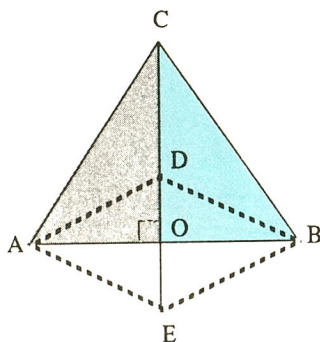
אם במרובע, אחד האלכסונים הוא אנך אמצעי לאלכסון השני, הרי המרובע הוא דלתון.

משפט זה מוכר יותר בנוסח אחר:

6.4 משפט :



אם נקודה נמצאת על האנך האמצעי לקטע, רוחקיה מקצות הקטע שווים זה לזה.



הוכחה

CO - אנך אמצעי לקטע AB .

הרוחקים של C מקצות הקטע שווים:

$$AC = BC$$

(מוכיחים זאת בעזרת חפיפת המשולשים AOC ו- BOC).

שוויון כזה יתקיים לכל נקודה הנמצאת על

$$AD = BD \text{ האנך האמצעי:}$$

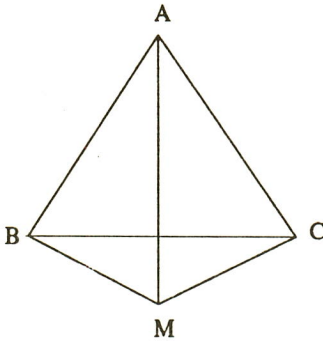
$$AE = BE \text{ וכו'.}$$

ננסח משפט הפוך לזה שבסעיף 6.4:

6.5 משפט :

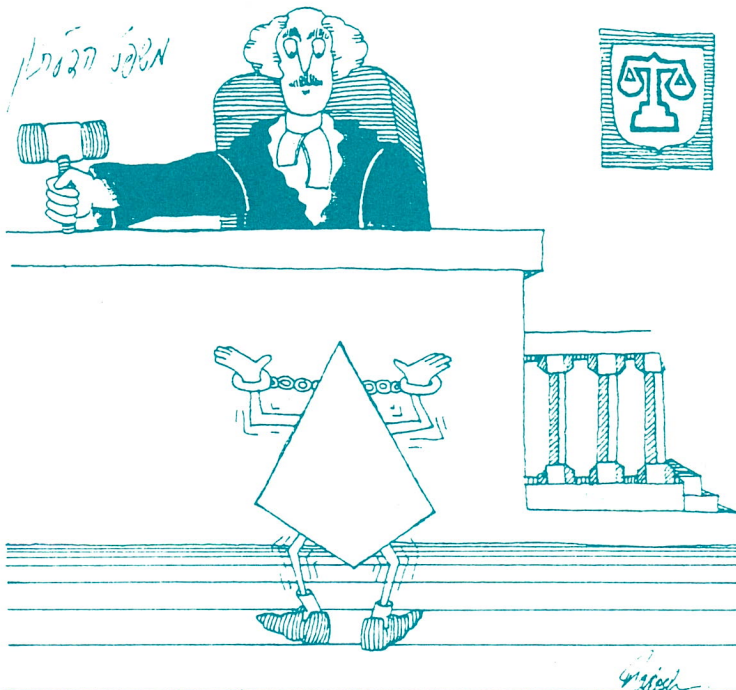


נקודות שרוחקיהן מקצות קטע שווים זה לזה נמצאות על האנך האמצעי לקטע.

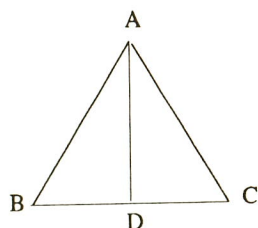


הסבר

נתיחם לקטע BC. לנקודת A
ו-M רוחקים שווים מקצותיו -
 $AB = AC$, $MB = MC$, פרוש הדבר
שהמרובע ABMC הוא דלתון.
לכן, הקטע המחבר את A עם M
הוא אנך אמצעי ל-BC (לפי משפט הדלתון).

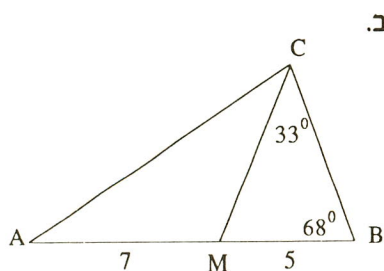


תרגילים



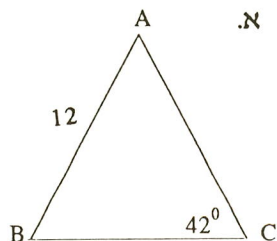
1. משולש שווה-שוקיים $(AB = AC)$ ונתון: $AB = 13$ ס"מ, $BC = 10$ ס"מ.
 א - חשב את היקף המשולש.
 ב - אם AD חוצה זווית הראש, $AD = 12$ ס"מ.
 חשב את היקף המשולש ABD .

בתרגילים 2-4 משורטט משולש שווה-שוקיים ABC (A קודקוד הראש).
 העזר בתכונות המשולש השווה-השוקיים, כדי לקבל מהנתונים הרשומים נתונים נוספים.



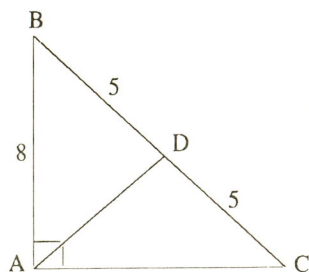
$$AC = ?$$

$$\angle ACM = ?$$



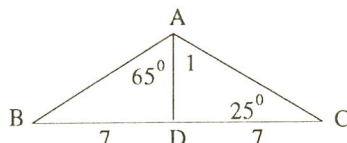
$$AC = ?$$

$$\angle B = ?$$



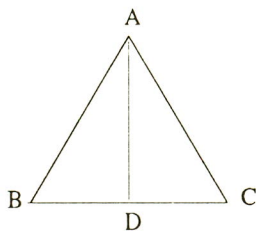
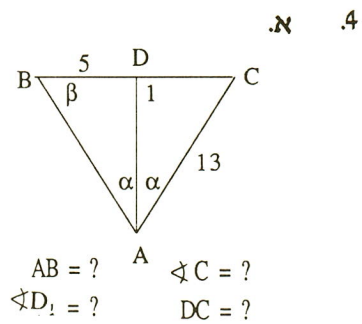
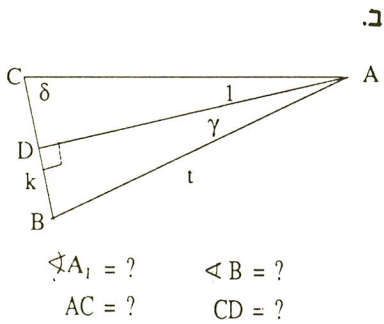
$$\angle BDA = ? \quad AC = ?$$

$$\angle DAC = ? \quad \angle BAD = ?$$



$$\angle A_1 = ? \quad \angle B = ?$$

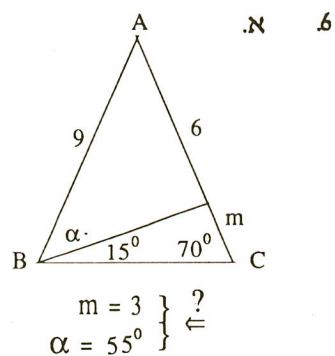
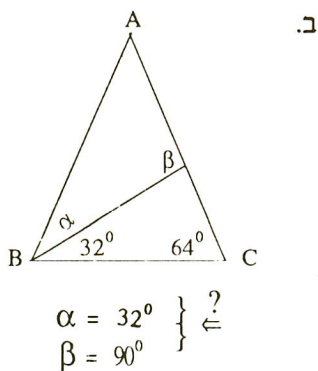
$$\angle ADB = ?$$



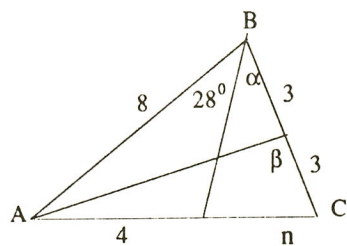
5 במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$) נתון: $AB = 7$ ס"מ, $BD = 3$ ס"מ, $AD \perp BC$. חשב את היקף המשולש ABC.

בכל אחת מהבעיות 6-8 משורטט משולש שווה-שוקיים ABC (A קודקוד הראש).

תלמיד נעזר בתכונות המשולש השווה-השוקיים והסיק מסקנה על קיום נתונים נוספים והם רשומים כשסימן שאלה לידם. האם מסקנותיו נכונות? נמק!

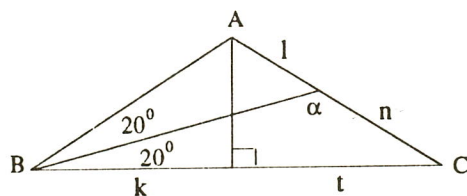


$$\left. \begin{array}{l} n = 4 \\ \alpha = 28^\circ \\ \beta = 90^\circ \end{array} \right\} ?$$

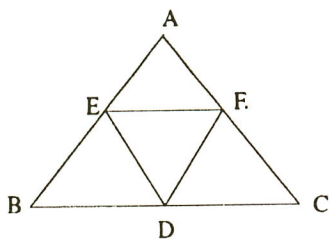


.7

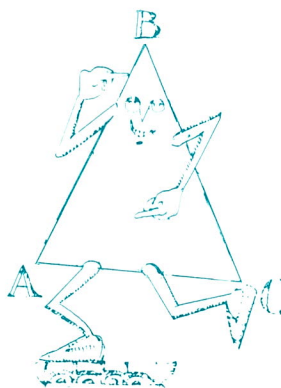
$$\left. \begin{array}{l} l = n \\ k = t \\ \alpha = 90^\circ \end{array} \right\} ?$$

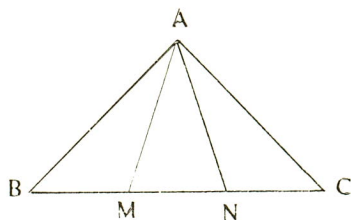


.8

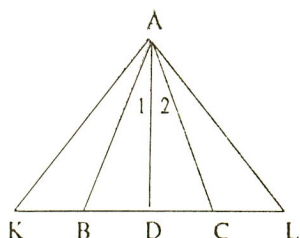


9. הוכח: אם נחבר את אמצעי הצלעות,
במשולש שוו"ש ABC
(A קודקוד הראש) ייוצר משולש
EFD שווה-שוקיים. (D קודקוד הראש).

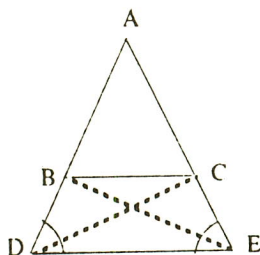




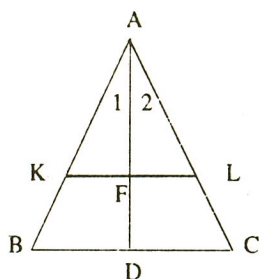
10. הוכח: אם מחלקים את
הבסיס BC, של משולש שרשי
ABC, לשלושה חלקים שווים
 $BM = MN = NC$, אזי המשולש
AMN הוא שווה-שוקיים.



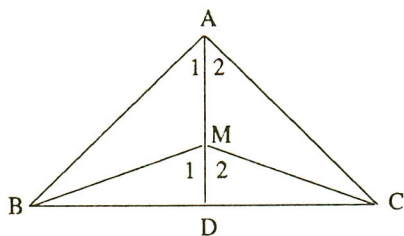
11. AD חוצה את זווית הראש A של
משולש שווה-שוקיים ABC.
נתון: $KB = CL$ (על המשכי BC)
הוכח: א - $KD = DL$
ב - $\triangle KAL$ הוא שווה-שוקיים.



12. $\triangle ABC$ משולש שווה-שוקיים
(A קודקוד הראש).
נתון: $BD = CE$
הוכח: א - $\angle D = \angle E$
ב - $BE = CD$

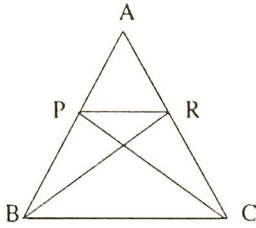


13. $\triangle ABC$ משולש שווה-שוקיים,
AD חוצה את זווית הראש A,
נתון: $BK = CL$
הוכח: א - $KF = FL$
ב - $AF \perp KL$

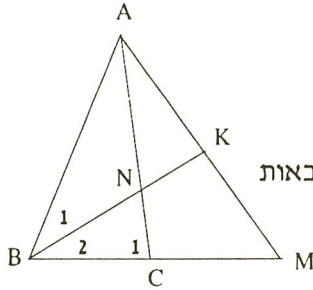


14. AD חוצה את זווית הראש A -
של משולש שרשי ABC.
M נקודה על AD
הוכח: א - $BM = MC$
ב - $\angle M_1 = \angle M_2$
(הסבר בשתי דרכים).

15. הוכח כי חוצי זוויות הבסיס במשולש שווים, שווים זה לזה.



16. הוכח: אם BR ו-CP הם חוצי זוויות הבסיס, במשולש שווים ABC, המשולש APR הוא משולש שווים.



17. במשולש שווים ABC (BC-בסיס)

נתון: $BC = CM$ $AC = 2BC$
 $\angle B_1 = \angle B_2$

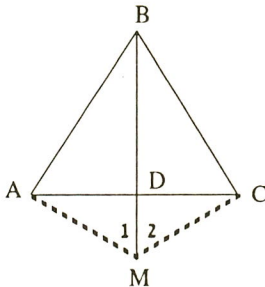
האם ניתן להסיק מהנתון את המסקנות הבאות

א - $\angle C_1 = 2\angle B_1$

ב - $AN = NC$

ג - $AK = KM$ נמק!

18. הוכח: התיכון לבסיס של משולש שווה-שוקיים חוצה את זווית הראש ומאונך לבסיס.

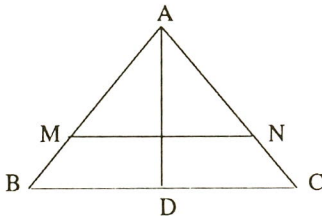


19. ABC משולש שווה-שוקיים, $AB = BC$

D - אמצע הבסיס

M נקודה על המשך BD.

הוכח: $\angle M_1 = \angle M_2$



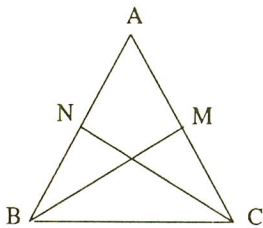
20. במשולש שווים ABC ($AB = AC$)

הקצו על השוקיים קטעים שווים

D. $BM = CN$ אמצע הבסיס BC.

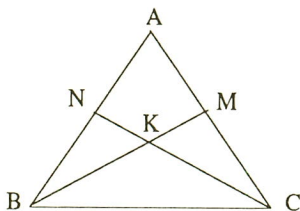
הוכח כי: $MN \perp AD$

21. הוכח כי התיכונים לשוקיים במשולש שווים, שווים זה לזה.



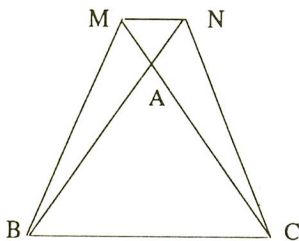
22. הוכח: אם BM ו-CN תיכונים לשוקיים, במשולש שווש ABC, אזי הם יוצרים עם בסיס המשולש, זוויות שוות:
 $\angle MBC = \angle NCB$

23. הוכח: אם נסמן ב-P את נקודת החיתוך של התיכונים בבעיה הקודמת, הרי:
 $\angle BAP = \angle PAC$

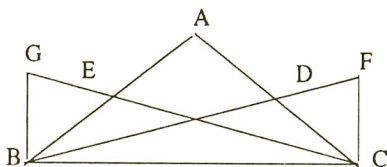


- * 24. BM ו-CN הם חוצי זוויות הבסיס, במשולש שווש ABC. נקודת החיתוך שלהם K. הוכח כי $NK = KM$.

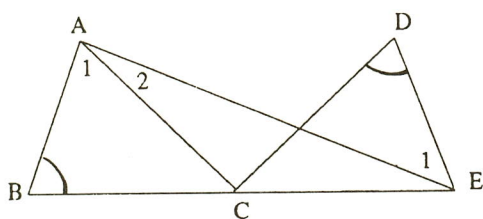
25. בתנאי הבעיה הקודמת, הוכח כי הקטע AK חוצה את הזווית A.



- * 26. נתון משולש שווש ABC. את שוקיו AB ו-AC האריכו מעבר לקודקוד A, בקטעים שווים $AN = AM$. הוכח: $\angle MBN = \angle NCM$.



- * 27. את התיכונים BD ו-CE של שוקי משולש שווש ABC, האריכו בקטעים שווים $EG = DF$. הוכח: $BG = CF$.



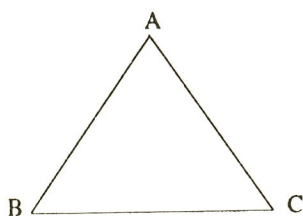
28. ** בשרטוט נתון:

$$BC = CD, \quad AB = DE$$

$$\angle B = \angle D$$

$$\angle E_1 = \angle A_1 - \angle A_2$$

משולש שווה-צלעות



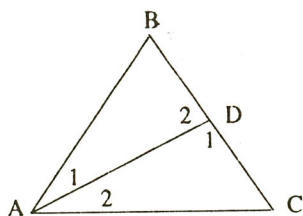
29. המשולש ABC הוא שווה-צלעות,

$$\angle A = \alpha, \quad AB = 5 \text{ ס"מ}$$

השלם את החסר:

$$BC = \boxed{} \quad AC = \boxed{}$$

$$\angle C = \boxed{} \quad \angle B = \boxed{}$$



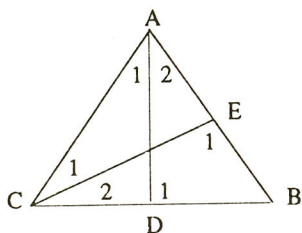
30. במשולש שווה-צלעות ABC

$$\angle A_1 = \angle A_2, \quad AB = 8 \text{ ס"מ}$$

השלם את החסר:

$$BD = \boxed{} \quad AC = \boxed{}$$

$$\angle D_2 = \boxed{} \quad \angle D_1 = \boxed{}$$



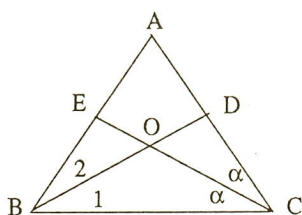
31. המשולש ABC הוא שווה-צלעות,

$$\angle A_1 = \angle A_2, \quad AE = EB$$

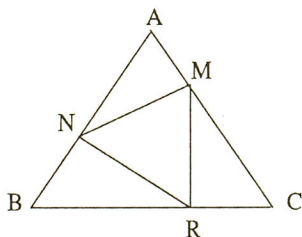
$$\angle C_2 = 30^\circ, \quad AC = 7 \text{ ס"מ}$$

חשב: א - CD, BC, AE

$$\angle E_1, \angle C_1, \angle D_1$$



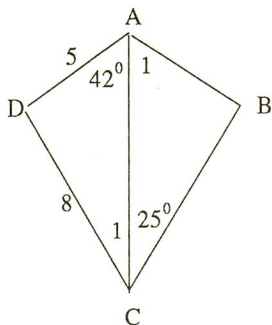
32. במשולש שווה-צלעות ABC מחלק את הזווית C לשתי זוויות שוות ל- α כל אחת. O נקודה על CE, כך ש: $OB = OC$ מה גודלן של הזוויות הבאות: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.



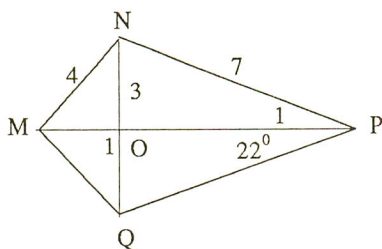
33. במשולש שווה-צלעות ABC הקצו על הצלעות, שלושה קטעים שווים $AM = BN = CR$. הוכח כי משולש MNR הוא שווה-צלעות.

34. את צלעות המשולש שווה-הצלעות ABC, האריכו בקטעים שווים $AP = BT = CS$. הוכח, כי המשולש PTS שווה.

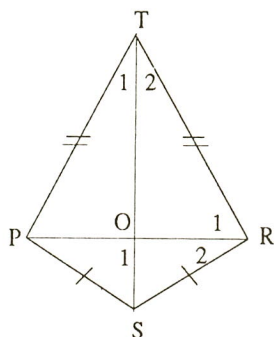
דלתון



35. דלתון ABCD. התייחס לנתונים שבשרטוט וחשב את גודלן של $\angle A_1$, $\angle C_1$, $\angle B$, $\angle A$.



36. דלתון MNPQ. התייחס לנתונים שבשרטוט וחשב את הגודל של: $\angle OQ$, $\angle PQ$, $\angle MQ$ - א $\angle P_1$, $\angle O_1$ - ב



37. PTRS דלתון ובו נתון:

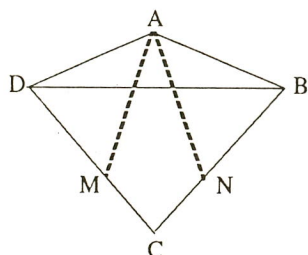
$$\angle R2 = 27^\circ, \angle R1 = 62^\circ$$

$$PR = 10\text{ ס"מ}, \angle T1 = 28^\circ$$

חשב את

א - $\angle TPS$, $\angle O1$, $\angle T2$

ב - RO , PO

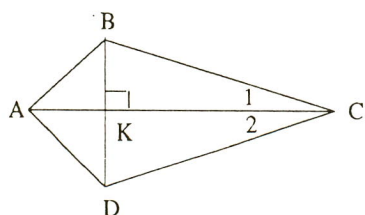


38. ABCD דלתון (A ו- C קודקודי הראש).

$$MC = NC$$

הוכח: א - $AM = AN$

ב - $AC \perp MN$



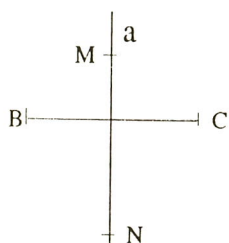
39. הנקודות K ו- A נמצאות על חוצה

$$\text{הזווית } C (\angle C_1 = \angle C_2).$$

האנך ל- AC בנקודה K חותך את

שוקי הזווית בנקודות B ו- D.

הוכח: ABCD - דלתון.



40. נתון קטע BC ו- a האנך האמצעי

שלו. M ו- N שתי נקודות על a משני צדי BC,

הוכח כי MN חוצה את הזווית

$$BMC \text{ ו- } BNC.$$

41. הנקודות M ו-N נמצאות מאותו צד של הקטע BC ובמרחקים שווים מקצותיו.
 א - מהי הצורה ההנדסית MBNC.
 ב - הוכח:
 כאשר F נקודת המפגש של המשך MN עם BC.
42. בתנאי הבעיה הקודמת כאשר הוכח כי MN חוצה את הזוויות BMC ו-BNC.
43. הוכח: אם במרובע, חוצה אחד האלכסונים, את הזוויות, שאת קודדיהן הוא מחבר, הרי המרובע הוא דלתון.

תשובות

- (1 א-36; ב-30; 2 א-42, 12; ב-35, 12; 3 א-25, 65°; 90°; ב-45°, 45°, 90°, 8; 4 א-β, 13, 5, 90°;
 ב-δ, γ, k, t; 5) 20; 6 א-כו; ב-לא לגבי β;
 (7 לא לגבי α; 8 רק המסקנה k=t נכונה; 29) α, α, 5, 5;
 (30) 8, 4, 90°, 90°; 31) א-3.5, 7, 3.5; ב-90°, 30°, 90°;
 (32) α, 2α, 2α; 35) 5, 8, 42°, 25°; 36) א-4, 7, 3;
 ב-90°, 22°; 37) א-28°, 90°, 89°; ב-5, 5.

פרק ג: קשרים בין צלעות

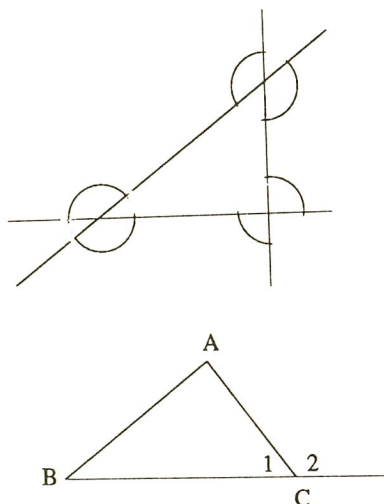
וזוויות במשולש

בפרק זה נטפל בשלושה סוגי קשרים:

1. בין זוויות בלבד.
2. בין צלעות וזוויות.
3. בין צלעות בלבד.

1. יחסים בין זוויות

1.1 זווית חיצונית למשולש היא זווית הצמודה לזווית המשולש.



זווית חיצונית מתקבלת כאשר מאריכים צלע של משולש. כל צלע ניתן להאריך לשני כיוונים; לכן, מתקבלות שש זוויות חיצוניות, כשבכל קודקוד שתיים שוות זו לזו, בתור קודקודיות.

מציינים ש- $\angle C_2$ היא זווית חיצונית בעזרת השוויון:

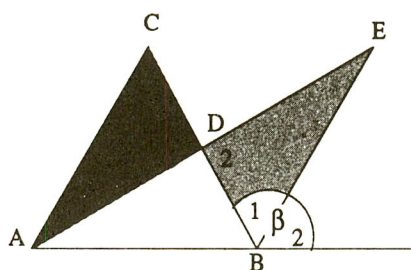
$$\angle C_1 + \angle C_2 = 180^\circ$$

1.2 משפט:



זווית חיצונית למשולש, גדולה מכל זווית פנימית שאינה צמודה לה.

במסגרת הוכחת משפט זה נלמד שכאשר שרטוט הבעיה אינו מספיק להוכחה, מותר להוסיף שרטוטים. שיעזרו להוכיח את המשפט או הבעיה. תוספת זו נקראת **בנית-עזר**. (בי"ע).



$\triangle ABC$ $\angle ABC + \beta = 180^\circ$	נתון:
$\beta > \angle C, \quad \beta > \angle A$	צ"ל:
$AD = DE \quad CD = DB$ AD על המשך E $\triangle ACD \equiv \triangle BED$ לפי מ.ח. I $(\text{בי"ע}) \quad CD = DB$ $(\text{בי"ע}) \quad AD = DE$ $(\text{קודקודיות}) \quad \angle D_1 = \angle D_2$ $(\text{ח.מ.ב.ח.}) \quad \angle C = \beta_1 \Leftarrow$ $(\text{השלם גדול מחלקו}) \quad \beta > \beta_1$ $\beta > \angle C \Leftarrow$	הוכחה:

כדי להוכיח ש- $\beta > \angle A$ נבנה את הזווית הקודקודית ל- β , ובי"ע תעשה מקודקד C.

מ.ש.ל.

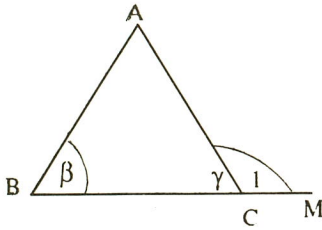
1.3

מסקנות המשפט:

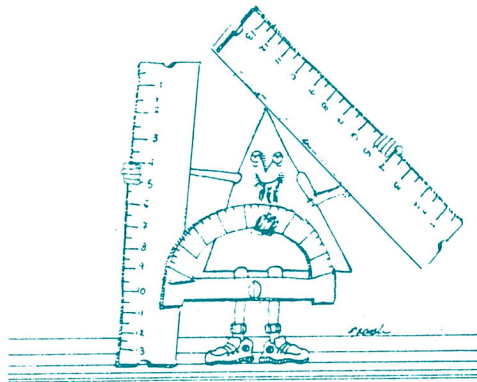
- ממשפט זה נובעות מסקנות אחדות:
- במשולש ישר-זווית, שתי הזוויות האחרות הן חדות.
 - במשולש קהה-זווית, שתי הזוויות האחרות הן חדות.
 - במשולש שווה-שוקיים, זוויות הבסיס חדות ;
לכן:
 - במשולש שוו"צ שלוש הזוויות הן חדות.
 - מנקודה שמחוץ לישר אפשר להוריד לישר זה, אנך אחד בלבד.

1.4 דוגמה לשימוש במשפט

הוכח: במשולש שווה-שוקיים, שתי זוויות הבסיס הן חדות (מסקנה שלישית לעיל).



$AB = AC, \triangle ABC$	נתון
$\beta < 90^\circ, \quad \gamma < 90^\circ$	צ"ל
בי"ע: המשך BC (M) $\nexists C_1 > \beta$ (חיצונית ל-$\triangle ABC$) $\beta = \gamma$ (זוויות בסיס שוות) $\nexists C_1 > \gamma \Leftarrow$ $\gamma < 90^\circ, \nexists C_1 > 90^\circ \Leftarrow$ $\beta < 90^\circ \Leftarrow$	הוכחה:

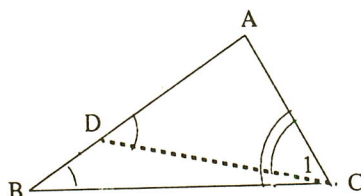


2. יחסים בין צלעות וזוויות במשולש

2.1 משפט



אם במשולש-שתי צלעות בלתי שוות, הרי מול הגדולה שבשתי הצלעות, מונחת הזווית הגדולה.



נתון	$AB > AC, \triangle ABC$
צ"ל	$\angle C > \angle B$
הוכחה	בי"ע: מעתיקים את AC על AB, החל מ-A ומחברים ל-D- $\angle C_1 = \angle D$ (זוויות בסיס במשולש שוו"ש). $\angle C > \angle C_1$ (השלם גדול מחלקו) $\angle C > \angle D \Leftarrow$ אבל $\angle D > \angle B$ (חיצונית למשולש BDC) $\angle C > \angle B \Leftarrow$

מ.ש.ל.

2.2 משפט



אם במשולש-שתי צלעות שוות זו לזו, גם הזוויות המונחות מולן שוות זו לזו.

משפט זה הוכח במסגרת תכונות משולש שוו"ש.

2.3 משפט הפוך.. הגדרה

משפט הפוך למשפט מסוים, מניח כנתון את המסקנה של המשפט המקורי, ומקבל כמסקנה את הנתון של המשפט המקורי. הסעיפים נתון וצ"ל מתחלפים בתפקידיהם.

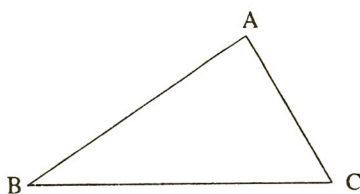


לא לכל משפט קיים משפט הפוך.

2.4 משפט (הפוך)



אם במשולש שתי זוויות שונות זו מזו, הרי מול הזווית הגדולה תהיה מונחת הצלע הגדולה.



$\angle C > \angle B, \triangle ABC$	נתון:
$AB > AC$	צ"ל:
בדרך השלילה $AB \leq AC$ נניח כלומר: או $AB < AC$ או $AB = AC$ אבל אם $AB < AC$ $\angle C < \angle B$ (לפי משפט ראשון) ואם $AB = AC$ $\angle C = \angle B$ (לפי משפט שני) שתי האפשרויות הללו סותרות את הנתון. $AB > AC \Leftarrow$	הוכחה:

מ.ש.ל.

שים לב!



- במסגרת משפט זה הדגמנו את המושג הוכחה בדרך השלילה. עיקריה של הוכחה בדרך השלילה הם:
- מניחים שסעיף "צריך להוכיח" — אינו נכון.
 - על סמך הנחה זו, מקבלים מסקנה לא הגיונית מבחינה מתמטית, או מסקנה הסותרת את הנתון.
 - הסתירה התקבלה ע"ש ההנחה המוטעית, שהסעיף צ"ל לא נכון.
 - מסקנה: מה שהיה להוכיח, אמנם נכון.

מסקנות המשפט:

- במשולש קהה זווית, הצלע מול הזווית הקהה, היא הגדולה במשולש.
- במשולש ישר-זווית, היתר הוא הצלע הגדולה במשולש.

2.5 משפט (הפוך)

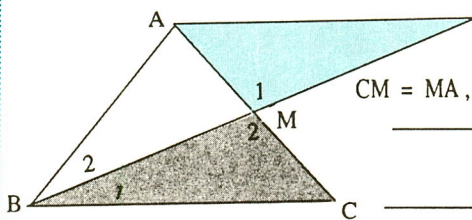


במשולש, שבו שתי זוויות שוות זו לזו, מונחות מולן צלעות שוות.

גם במקרה זה, ההוכחה היא בדרך השלילה. הוכח!

2.6 דוגמה

הוכח: אם במשולש ABC , MB תיכון לצלע b , ונתון: $AB < BC$, הרי הזווית שייצר התיכון עם הצלע הארוכה, קטנה מזו שהוא יוצר עם הצלע הקצרה.



$$CM = MA, \quad BC > AB, \quad \triangle ABC$$

נתון

$$\angle B_2 > \angle B_1$$

צ"ל

בי"ע - הארכת התיכון כארכו:
 $N - A, BM = MN$

הוכחה

$$\begin{aligned} &\triangle BCM \cong \triangle NAM \quad \text{לפי מ.ח. I:} \\ &\left. \begin{array}{l} \text{(נתון)} \quad CM = MA \\ \text{(בי"ע)} \quad BM = MN \end{array} \right\} \\ &\text{(קודקודיות)} \quad \angle M_1 = \angle M_2 \end{aligned}$$

מכאן נובע:

$$1. \quad AN = BC \quad \text{(מול זוויות שוות - צלעות שוות)}$$

$$2. \quad \angle N = \angle B_1 \quad \text{(מול צלעות שוות - זוויות שוות)}$$

ב- $\triangle ANB$:

$$AN > AB \quad \text{(על סמך נתון ומסקנה 1)}$$

$$\angle B_2 > \angle N \quad \text{(מול הצלע הגדולה - הזווית הגדולה)}$$

$$\angle B_2 > \angle B_1 \quad \leftarrow \text{(ע"ס מסקנה 2)}$$

מ.ש.ל.



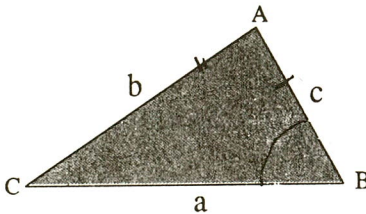
בשימוש במשפטים שבסעיף זה, יש לזכור, שהם מתקיימים במשולש אחד, או במשולשים חופפים. אם רוצים להסיק מסקנות הקשורות למשפטים הנ"ל, לגבי שני משולשים, יש לבדוק תחילה אם הם חופפים.

3. שימושים

3.1 משפט חפיפה רביעי



אם שתי צלעות במשולש אחד, שוות בהתאמה לשתי צלעות במשולש שני, והזווית מול הצלע הגדולה (מבין השתיים) במשולש הראשון, שווה לזווית המתאימה לה במשולש השני, הרי המשולשים חופפים.



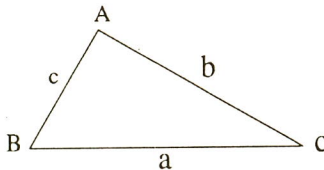
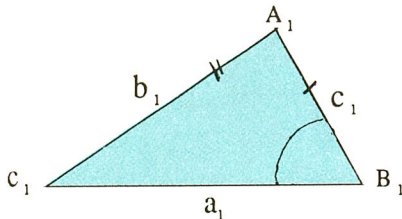
הדגמה: אם $b = b_1$

$c = c_1$

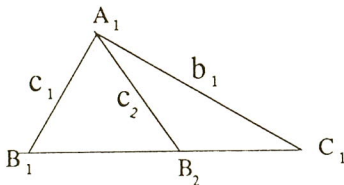
$b > c$

$\angle B = \angle B_1$

$\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$ (מ.ת. IV).

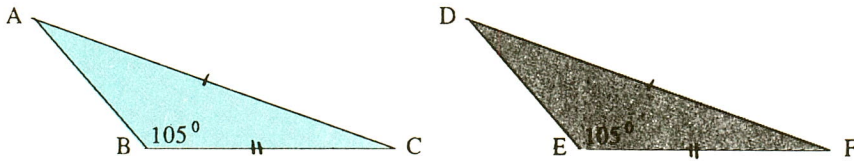


ההגבלה "הזווית מול הצלע הגדולה" מאפשרת חד-משמעית חפיפה, כי אם הזווית תהיה מונחת מול הצלע הקטנה, יתכנו שני משולשים שונים, בעלי אותם נתונים.



למשל, אם הנתונים היו $\angle C, c, b$ (השווים ל- $\angle C_1, c_1, b_1$), כאשר $b > c$, הרי $\triangle A_1B_2C_1$ אינו חופף ל- $\triangle ABC$, למרות ש- $\triangle A_1B_2C_1$ הוא בעל אותם נתונים כמו $\triangle A_1B_1C_1$ וכמו $\triangle ABC$.

המשפט שבסעיף 2.1 מאפשר לקבוע על פי נתוני הבעיה, אם מתקיימים תנאי המשפט. למשל, בשני המשולשים המשורטטים יש שוויון בין שתי צלעות $BC = EF$, $AC = DF$



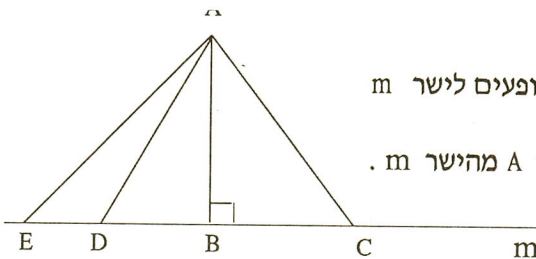
וגם $\angle B = \angle E = 105^\circ$ היות וזו זווית קהה, מונחת מולה הצלע הגדולה במשולש $(AC \text{ ו- } DF)$, לכן משולשים אלה חופפים לפי משפט חפיפה רביעי.

באותו אופן מתקבל:

משולשים ישרי-זווית שבהם שווים היתר ואחד הניצבים חופפים.

3.2 משופע והיטל

אם מנקודה שמחוץ לישר, יוצאים מספר ישרים אל הישר, ביניהם אנך אחד, אז האנך הוא הקטע הקצר ביותר, והוא נקרא **רוחק הנקודה מהישר**. הקטעים האחרים נקראים **משופעים**.



נדגים זאת:

אם: AE, AD, AC משופעים לישר m

ו- $AB \perp m$.

אז AB הוא רוחק הנקודה A מהישר m .

מושג שמתקשר למושג המשופע הוא **ההיטל** שהוא המרחק בין קצה המשופע לבין קצה האנך היוצא מאותה נקודה. בשרטוט הנ"ל BC הוא ההיטל של AC על הישר m . הקשר בין משופעים והיטליהם מנוסח במשפטים הבאים:

משפט:



אם שני משופעים יוצאים מנקודה אחת לאותו ישר והם שווים זה לזה, גם היטליהם על ישר זה שווים;
וההפך: אם ההיטלים שווים המשופעים שווים. הוכח:

משפט:



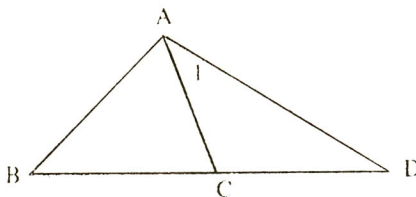
אם שני משופעים יוצאים מנקודה אחת לאותו ישר והם שונים, למשופע הגדול - ההיטל הגדול; וההפך: אם ההיטלים שונים, להיטל הגדול - המשופע הגדול. הוכח !

4. יחסים בין צלעות במשולש

4.1 משפט



סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.



ב"ע $CD = AC$, $D - A$,
(CD - המשכו של BC)

ב- $\triangle ACD$: $\angle A_1 = \angle D$ (זוויות בסיס במשולש שוו"ש).

$\angle A < \angle A_1$ (השלם גדול מחלקו)

לכן $\angle A > \angle D$

$\Leftarrow BD > AB$ ב- $\triangle ABD$ מול הזווית הגדולה - הצלע הגדולה.

כלומר: $BC + CD > AB$,

$CD = AC$ (ב"ע)

$\Leftarrow BC + AC > AB$

מ.ש.ל.

4.2 משפט

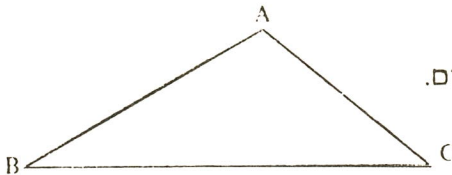


הפרש שתי צלעות במשולש קטן מהצלע השלישית.

כלומר $BC - AB < AC$

משפט זה ניתן להוכיח בדרך הנדסית

וגם בדרך אלגברית, ע"ס המשפט הקודם.

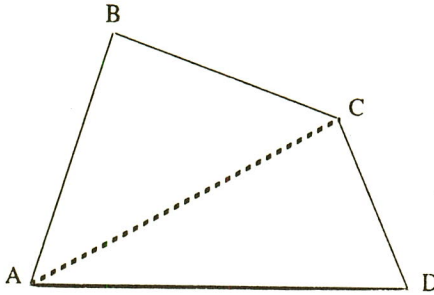


מסקנות:

4.3 משפט



הרוחק בין שתי נקודות (שהוא הקטע המחבר אותן) קצר, מכל קו שבור, המחבר את שתי הנקודות הנ"ל.



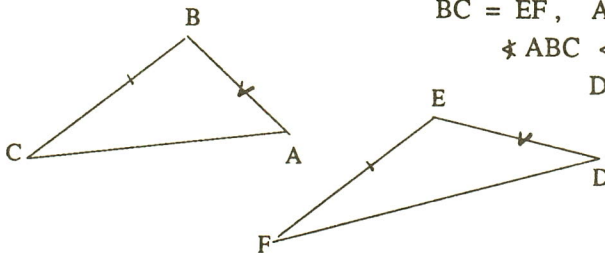
נתון	AD - קטע ABCD - קו שבור
צי"ל	$AB + BC + CD > AD$
הוכחה	בי"ע A - C ב - $\triangle ABC$ $AB + BC > AC$ (לפי 4.1) ב - $\triangle ACD$ $AC + CD > AD$ (לפי 4.1) $AB + BC + CD > AC + CD > AD \Leftarrow$ או $AB + BC + CD > AD$

מ.ש.ל.

4.4 משפט



אם שתי צלעות במשולש אחד שוות בהתאמה לשתי צלעות במשולש אחר, והזוויות הכלואות בין הצלעות הללו בשני המשולשים שונות, אז הצלע המונחת מול הזווית הגדולה, גדולה יותר מהצלע המונחת מול הזווית הקטנה.



אם: $BC = EF$, $AB = DE$

$\angle ABC < \angle DEF$

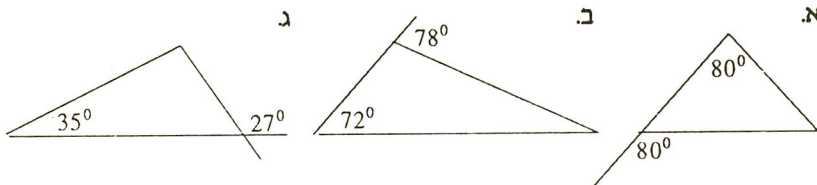
אז: $DF > AC$

כלומר,

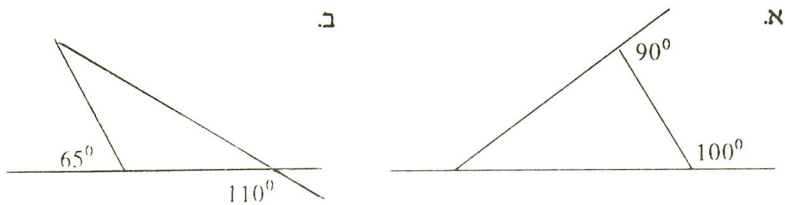
תרגילים

יחסים בין זוויות

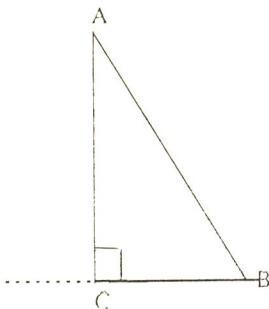
1. באלו מהמשולשים הבאים נפלה טעות. נמק!



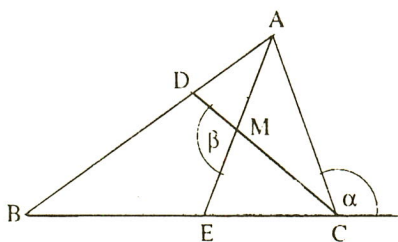
2. האם יתכן משולש שזוויותיו החיצוניות כרשום בשרטוט? נמק!



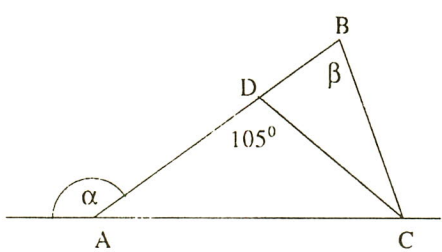
3. הראה כי אם במשולש זווית אחת ישרה, שתי הזוויות האחרות הן חדות, (העזר בזווית החיצונית שליד הזווית הישרה).



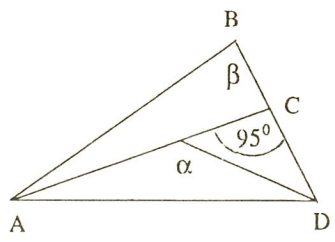
4. במשולש ABC , $\angle A$ זווית קהה. מה תוכל לומר על שתי הזוויות האחרות. נמק!



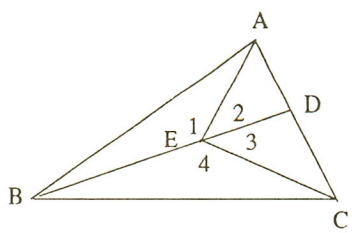
5. התיחס לשרטוט וסמן בכל
 סעיף את התשובות הנכונות.
 א - α חיצונית למשולש:
 $\triangle AEC$ (3) $\triangle ADC$ (2) $\triangle ABC$ (1)
 ב - β חיצונית למשולש:
 $\triangle AMC$ (3) $\triangle AMD$ (2) $\triangle MEC$ (1)



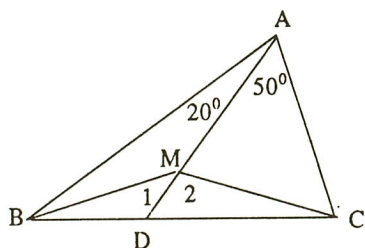
6. התיחס לנתונים שבשרטוט ורשום
 בכל משבצת את היחס המתאים:
 ($<$, $=$, $>$)
 א - α 105°
 ב - β 105°
 ג - α β



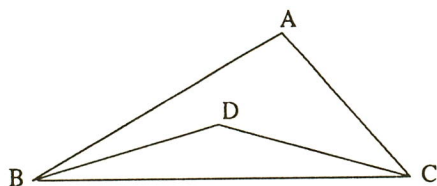
7. התיחס לנתונים שבשרטוט וקבע
 א - אלו מהערכים הבאים אינו מתאים
 α : 60° . 98° . 89°
 ב - אילו מהערכים הנ"ל אינו מתאים
 ל - β . נמק!
 ג - ציין במשבצת את היחס המתאים.
 α β



8. התיחס לשרטוט והשלם:
 $\angle E_1$ חיצונית למשולש
 $\angle E_2$ חיצונית למשולש
 $\angle E_3$ חיצונית למשולש
 $\angle E_4$ חיצונית למשולש

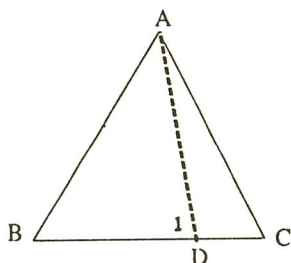


9. M נקודה בתוך משולש ABC
 AD עובר דרך M.
 התייחס לנתונים בשרטוט וקבע תנאי
 שצריכה לקיים:
 $\angle M_2 (2) < \angle M_1 (1)$

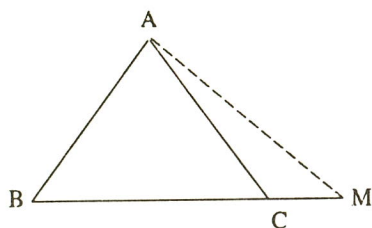


10. D נקודה בתוך המשולש ABC.
 הוכח: $\angle D > \angle A$

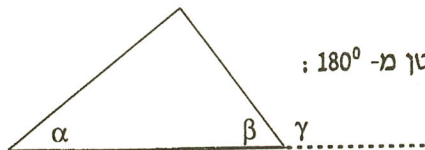
- 11*. העזר בבעיה הקודמת, כדי להראות שסכום הזוויות במשולש קטן מ- 360° .
 רמז: חבר את D ל-A והפעל את המסקנה שבבעיה הקודמת גם לזוויות B ו-C.



12. $\triangle ABC$ שווה שוקיים:
 $AB = AC$
 D נקודה על BC.
 הוכח: $\angle B < \angle D$



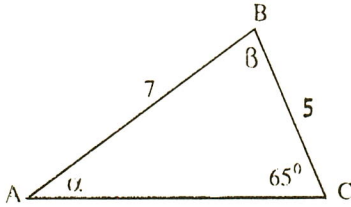
13. $\triangle ABC$ שווה שוקיים
 $AB = AC$
 M נקודה על המשך BC.
 הוכח: $\angle M < \angle B$



- 14*. הוכח שסכום שתי זוויות במשולש קטן מ- 180° :
 $\alpha + \beta < 180^\circ$
 רמז: העזר בזווית החיצונית γ

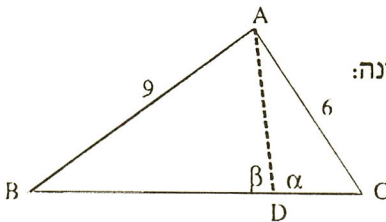
- 15 הוכח כי סכום 2 זוויות חיצוניות למשולש גדול מ- 180° .
(העזר בתרגיל הקודם).

יחסים בין צלעות וזוויות



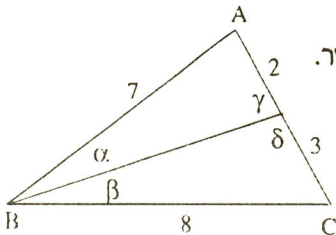
16. בהתייחס לנתונים שבשרטוט, האם אפשר לקבל תנאי על גודלה של הזוויות:

א - α
ב - β . נמק!



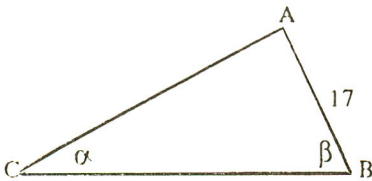
17. התייחס לשרטוט ובחר את התשובה הנכונה:

(1) $\alpha > \beta$ (3) $\alpha = \beta$
(2) $\alpha < \beta$ (4) לא ידוע
נמק!



18. התייחס לנתונים שבשרטוט ורשום לגבי כל זוג זוויות, אחת מהאפשרויות:
(1) $>$ (2) $=$ (3) $<$ (4) לא ניתן לקבוע קשר.

א) $\gamma \dots \delta$ ה) $\alpha \dots \delta$
ב) $\alpha \dots \beta$ ו) $\alpha \dots \alpha$
ג) $\alpha \dots \gamma$ ז) $A \dots \alpha$
ד) $A \dots B$



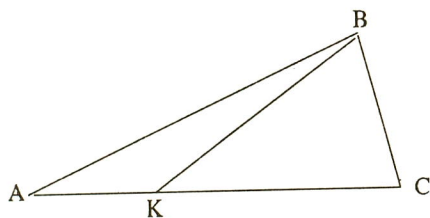
19. בשרטוט נתון. $AB = 17$, $\beta > \alpha$.
אלו מבין הערכים הבאים אינם יכולים לשמש כאורך הצלע AC:
א) 27 ב) 16 ג) 17
נמק!

20. הנתונים כמו בבעיה הקודמת. מהו גודל הצלע BC ?

בחר מאחת מ-4 האפשרויות הבאות:

א - $BC > 17$ ב - $BC = 17$ ג - $BC < 17$ ד - לא ניתן לקבוע.

21. הוכח: במשולש ישר זווית, גדול היתר מכל אחד מהניצבים.

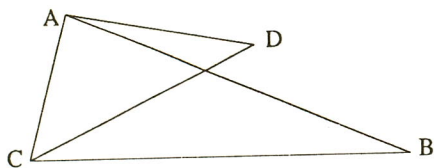


22. $\triangle ABC$ שווה שוקיים:

$$AB = AC$$

K נקודה על השוק AC.

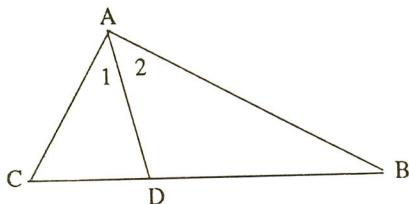
הוכח כי $BK > KC$



23. $\triangle ABC$ שווה שוקיים,

$$AB = BC$$

הוכח כי $AD < DC$



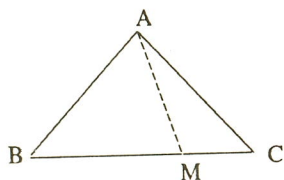
24. בשרטוט נתון: $\angle A_1 = \angle A_2$

האם אפשר להסיק מזה ש:

$$BD = DC \quad \text{נמק!}$$

25. השרטוט כמו בבעיה הקודמת.

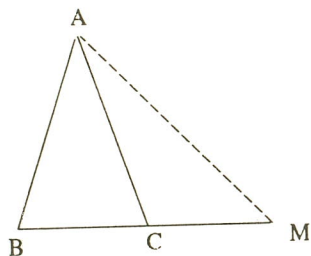
הוכח: $\angle BDA > \angle BAD$



26. M נקודה על הבסיס BC של משולש ABC,

שבו, $AB = AC$.

הוכח: $AM < AB$

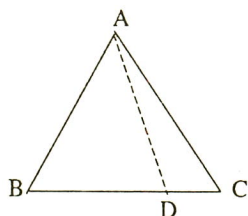


27. M נקודה על המשיך הבסיס

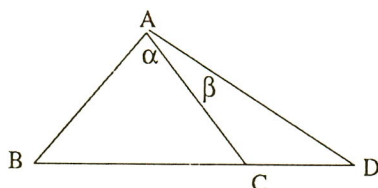
BC של משולש שווה שוקיים

$$(AB = AC) \triangle ABC$$

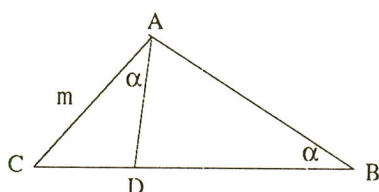
הוכח: $AM > AB$



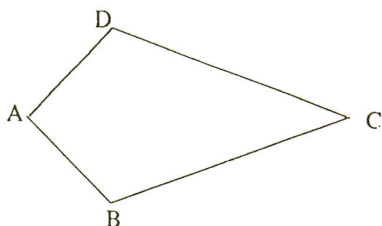
28. $\triangle ABC$ שווה צלעות
 D נקודה על BC
 הוכח: א - $AD < AB$
 ב - $AD > DC$



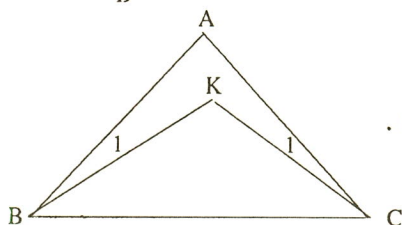
29. במשולש ABC נתון $BC > AB$
 D נקודה על המשך BC
 הוכח: $\alpha > \beta$



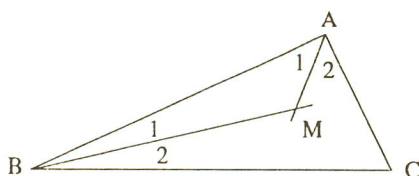
30. העזר בנתונים שבשרטוט והוכח:
 א - $CD < m$
 ב - $BC > m$



31. הוכח: אם במרובע ABCD, $AD = AB$
 והזוויות B ו-D שוות זו לזו,
 אזי המרובע הוא דלתון.
 (רמז: חבר B ל-D.)

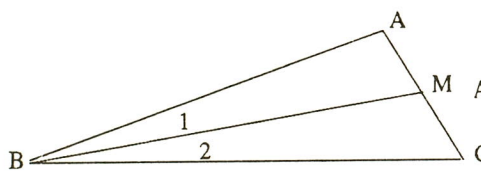


32. $\triangle ABC$ משולש שווה שוקיים ($AB = AC$).
 K נקודה בתוך המשולש כך ש:
 הוכח: $BK > KC$. הוכח: $\angle B_1 > \angle C_1$



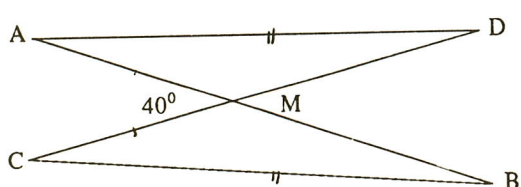
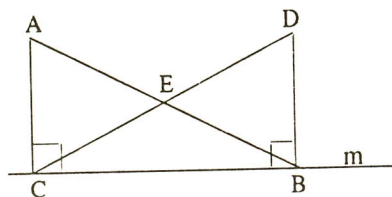
- 33*. במשולש נתון $BC > AC$,
 $\angle B_1 = \angle B_2$ $\angle A_1 = \angle A_2$
 הוכח: $BM > AM$

34*  במשולש ABC, M נקודה על AC
 כך ש- $\angle B_1 = \angle B_2$
 הוכח: $CM < CB$, $AM < AB$



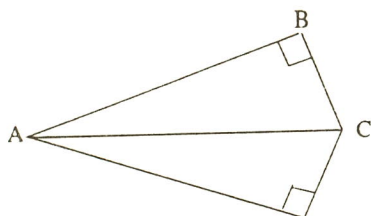
שימושים

35. שני קטעים AB ו-CD
 נחתכים באופן כזה ש:
 $AM = CM$, $AD = CB$
 כמו כן, $\angle AMC = 40^\circ$
 הוכח: $MD = MB$

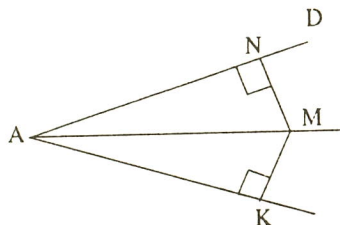



36. משתי נקודות A ו-D
 הורידו אנכים AC ו-DB לישר m
 כך שהתקבל $AB = DC$
 הוכח כי $AC = BD$

37*  בתנאי הבעיה הקודמת, הוכח כי $\triangle CEB$ הוא שווה שוקיים, ללא שימוש בחפיפה נוספת.

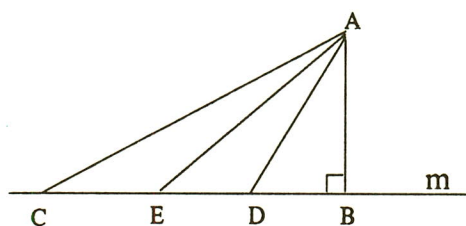


38. למרובע ABCD שתי זוויות ישרות
 $\angle D$ ו- $\angle B$ וכן $AB = AD$
 הוכח כי מרובע זה דלתון.



39. נקודה M נמצאת בתוך הזווית A.
 ידוע שרוחקי נקודה זו משוקי הזווית
 שווים זה לזה $NM = KM$
 הוכח: AM חוצה את הזווית A.

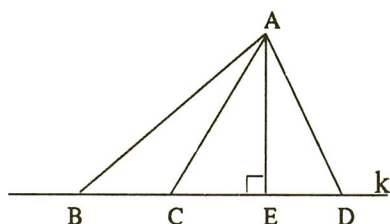
40* הוכח: אם במשולש שני גבהים שווים זה לזה, המשולש הוא שווה-שוקיים.



- 41* מנקודה A יוצאים 3 משופעים
לישר m
דרג אותם לפי גודלם.
נמק!



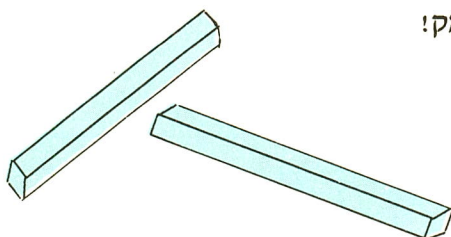
- 42** מנקודה יוצאים 3 משופעים
לישר, שניים מהם שווים זה לזה
. $AC = AD$
הראה כי $BE > ED$.



יחסים בין צלעות במשולש



43. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונים
האורכים (בס"מ) של 3 קטעים.
האם תוכל להרכיב מהם משולש. נמק!



- | | |
|-------------|-------------|
| א - 3, 4, 5 | ב - 1, 2, 3 |
| ג - 7, 5, 9 | ד - 3, 4, 8 |

44. במשחק מסוים יש להרכיב צורות הנדסיות מבדידים.
ילד מחזיק בידיו שני בדידים שאורכיהם 3 ס"מ ו- 8 ס"מ, והוא רוצה
להרכיב משולש.

איזה מהבדידים הבאים מתאים להשלמת המשולש:

- | | |
|--------|-----------|
| א - 16 | ב - 9 |
| ג - 11 | ד (*) - 5 |

45. במשחק הנ"ל, רוצה הילד להרכיב משולש שווה-שוקיים כשבידיו אותם
בדידים כמקודם.

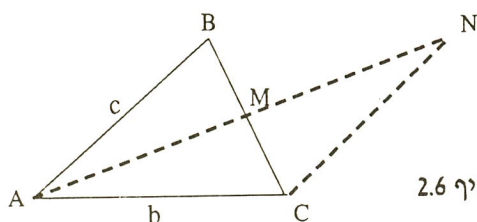
מה אורך הבדיד המתאים למטרה זו? נמק!

46. היקף משולש שווה שוקיים הוא 24 ס"מ. צלע אחת גדולה מצלע אחרת ב- 6 ס"מ. חשב את אורכי הבסיס והשוק. הבחן בין 2 מקרים. האם שניהם אפשריים.

47. צלע אחת של משולש שווה שוקיים קטנה מצלע אחרת ב- 12 ס"מ. היקף המשולש 33 ס"מ. חשב את אורכי הבסיס והשוק.

48. אורכי 2 צלעות של משולש שווה שוקיים הם 4 ס"מ ו- 9 ס"מ. חשב את היקף המשולש.

49. צלע אחת במשולש שווה שוקיים גדולה מצלע אחרת:
א - פי 2 ב - פי 3 ג - פי 1.5
התוכל לקבוע איזו מביניהן בסיס ואיזו השוק?



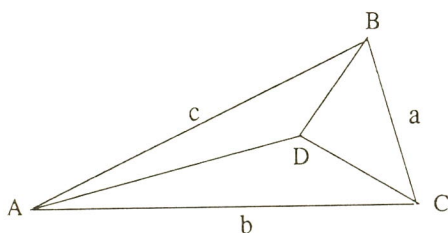
50. AM תיכון לצלע a.

$$\text{הוכח: } AM < \frac{b+c}{2}$$

רמז: עיין, בבניית העזר שבסעיף 2.6

51. הוכח: בכל משולש מתקיים $a < \frac{a+b+c}{2}$ (צלעות המשולש c, b, a)

רמז: הוסף לשני אגפי אי השוויון $a < b+c$ גודל שווה.

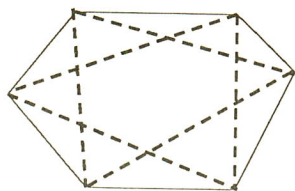
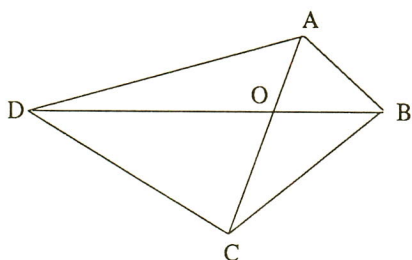


52. D נקודה בתוך $\triangle ABC$, הוכח:

$$DA + DB + DC > \frac{a+b+c}{2}$$

רמז: כתוב את 3 אי-השוויונים, הנוצרים במשולשים החלקיים וחבר אותם.


$$k < \frac{a+b+c+d}{2}$$

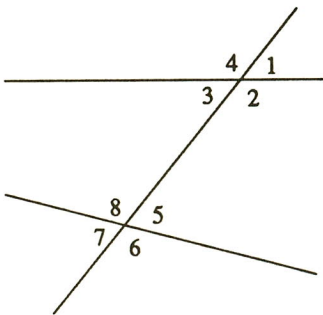
$$AC + BD > \frac{AB + BC + CD + AD}{2}$$


56.** הוכח כי סכום האלכסונים הקצרים של משושה (האלכסונים המדלגים על קודקוד אחד בלבד, ראה שרטוט) קטן מפעמיים הקפו.

(1) א, ג מוטעים; (2) א- כו; ב- לא;
 (5) א- 3,1 נכונים; ב- 2,1 נכונים; (6) א- $\alpha > 105^\circ$;
 ב- $\beta < 105^\circ$; ג- $\alpha \beta$; (7) א- $89^\circ, 60^\circ$; ב- 98° ; ג- $\alpha \beta$;
 (9) $M_2 > 50^\circ$; $M_1 > 20^\circ$; (16) א- $\alpha < 65^\circ$; ב- אי-אפשר;
 (17) לא ידוע; (18) א- 3; ב- 4; ג- 3; ד- 1; ה- 4;
 ו- 3; ז- 1; (19) 17, 16; (20) ד; (24) לא;
 (43) א-ג, כו; ב, ד- לא; (44) 9; (45) 8; (46) 10, 10, 4;
 (47) 15, 15, 3; (48) 22; (49) א, ב- השוק גדולה מהבסיס;
 ג- לא ניתן לקבוע;

פרק ד: מקבילים

1. זוויות מתאימות, מתחלפות, חד-צדדיות.



1.1 כאשר שני ישרים נחתכים על-ידי ישר שלישי, נוצרות בשתי נקודות החיתוך, שמונה זוויות. מבחינים בשלושה סוגי קשרים בין זוגות זוויות, הנמצאות, כל אחת בנקודת חיתוך אחרת:

א. **זוויות מתאימות** - נמצאות מאותו צד של החותך, ומאותו צד של הנחתכים (כלומר שתיהן מעל לישרים הנחתכים, או שתיהן מתחת לישרים הנחתכים).

ואלה הן: $\angle 1$ ו- $\angle 5$; $\angle 2$ ו- $\angle 6$;

$\angle 3$ ו- $\angle 7$; $\angle 4$ ו- $\angle 8$

ב. **זוויות מתחלפות** - נמצאות מצדדים שונים של החותך, ומצדדים שונים של הנחתכים - שתיהן בין הישרים (פנימיות): $\angle 2$ ו- $\angle 8$; $\angle 3$ ו- $\angle 5$; או שתיהן מחוץ לישרים (חיצוניות): $\angle 1$ ו- $\angle 7$; $\angle 4$ ו- $\angle 6$

ג. **זוויות חד-צדדיות** - נמצאות מאותו צד של החותך ומצדדים שונים של הנחתכים - שתיהן בין הנחתכים (פנימיות): $\angle 2$ ו- $\angle 5$; $\angle 3$ ו- $\angle 8$; או שתיהן מחוץ לנחתכים (חיצוניות): $\angle 1$ ו- $\angle 6$; $\angle 4$ ו- $\angle 7$.

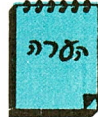
צמדי הזוויות הללו, קשורים זה בזה, באופן כזה, שאם קיימת תכונה מסוימת לגבי זוג אחד של זוויות, הדבר גורר קיום תכונה מתאימה (לא בהכרח אותה תכונה) לגבי צמד אחר. נראה זאת במשפט הבא:

1.2 משפט



אם שני ישרים נחתכים ע"י ישר שלישי וקיים זוג זוויות מתאימות שוות (או זוג זוויות מתחלפות שוות, או זוג זוויות חד-צדדיות שמסלימות זו את זו ל- 180°), אזי יתר זוגות הזוויות המתאימות שוות, הזוויות המתחלפות שוות והזוויות החד-צדדיות משלימות זו את זו ל- 180° .

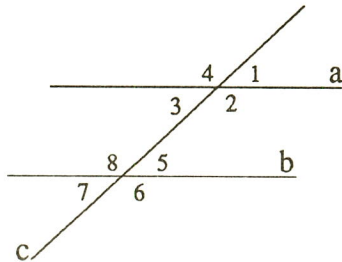
התוספת שבסוגריים: "או זוג זוויות מתחלפות שוות, וכי" מראה, שלמעשה המשפט הזה ניתן להפרדה לשלושה משפטים, כשכל פעם הנתון שונה.



שים לב!



התכונה הקיימת - אם בכלל - לגבי זוויות מתאימות ולגבי זוויות מתחלפות היא שיוויון, בעוד שאם קיימת תכונה לגבי הזוויות החד-צדדיות, הרי זו השלמה ל- 180° .



נוכיח את המשפט במקרה שנתון זוג זוויות מתאימות שוות.

נתון ישרים a, b נחתכים ע"י ישר c .
 $\angle 1 = \angle 5$

צ"ל יתר המתאימות:

$$\angle 4 = \angle 8; \angle 3 = \angle 7; \angle 2 = \angle 6$$

המתחלפות:

$$\angle 4 = \angle 6; \angle 1 = \angle 7; \angle 3 = \angle 5; \angle 2 = \angle 8$$

החד-צדדיות:

$$\angle 3 + \angle 8 = \angle 2 + \angle 5 = \angle 1 + \angle 6 = \angle 4 + \angle 7 = 180^\circ$$

הוכחה

$$\angle 2 = 180^\circ - \angle 1 \iff \angle 2 + \angle 1 = 180^\circ \text{ (צמודות)}$$

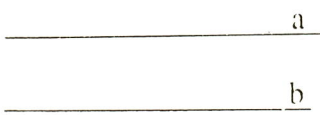
$$\angle 6 = 180^\circ - \angle 5 \iff \angle 6 + \angle 5 = 180^\circ \text{ (צמודות)}$$

$$\text{ונתון: } \angle 1 = \angle 5$$

$$\angle 2 = \angle 6 \iff \text{(שני גדלים השווים לגודל שלישי שווים זה לזה)}$$

המשך את ההוכחה, לגבי יתר הזוויות, תוך שימוש בתכונת זוויות צמודות וזוויות קודקודיות (כמו למשל לגבי $\angle 3$ ו- $\angle 7$ הקודקודיות ל $\angle 1$ ו- $\angle 5$;

2. ישרים מקבילים.



2.1 אם שני ישרים, הנמצאים באותו מישור, אינם נפגשים (ככל שנמשיך אותם), הם נקראים **ישרים מקבילים**.
הסימון לישרים מקבילים הוא $a \parallel b$.
למשל $a \parallel b$.

2.2 אכסיומת המקבילים

דרך נקודה שמחוץ לישר, אפשר לבנות ישר זה מקביל אחד בלבד.

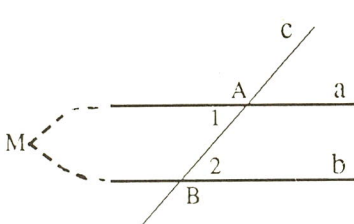
שני המשפטים הבאים (ישר והפוך) מראים את הקשר בין ישרים מקבילים, הנחתכים על-ידי ישר שלישי, לתכונות, המאפיינות את הזוויות המתאימות, המתחלפות והחד צדדיות.

2.3 משפט

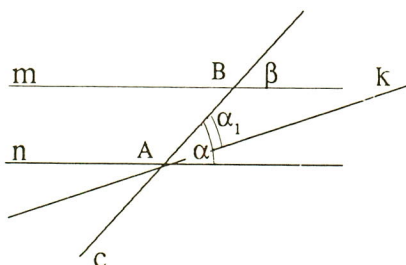


אם שני ישרים נחתכים על-ידי ישר שלישי, וקיים זוג אחד של זוויות מתאימות שוות זו לזו (או זוג זוויות מתחלפות שוות או זוג זוויות חד-צדדיות, המשלימות זו את זו ל- 180°), אזי הישרים מקבילים.

נוכיח את המשפט, כאשר מניחים שיש זוג זוויות מתחלפות שוות.

נתון a, b ישרים, הנחתכים על-ידי ישר c , בנקודות A ו- B $\angle 1 = \angle 2$	
	צ"ל $a \parallel b$
הוכחה (בדרך השלילה) נניח $a \not\parallel b$ (אינם מקבילים) כלומר יחתכו בנקודה כלשהי M . $\Leftarrow$ נוצר משולש ABM , שבו $\angle 1 > \angle 2$ (2 זווית חיצונית למשולש ABM) וזה סתירה לנתון. סתירה זו נובעת מההנחה המוטעית: $a \not\parallel b$. מסקנה: $a \parallel b$. מ.ש.ל.	

2.4 משפט (הפוך)
אם שני ישרים מקבילים נחתכים על-ידי ישר שלישי, הזוויות המתאימות שוות זו לזו.



נתון	$m \parallel n, c \text{ חותך.}$
צ"ל	$\alpha = \beta$
הוכחה	נניח $\alpha \neq \beta$ לכן נבנה בנקודה A על AB, זווית α_1 כך ש: $\alpha_1 = \beta$ $m \parallel k \leftarrow$ (לפי המשפט הישר).
	אבל לפי אכסיומת המקבילים, דרך נקודה A עובר מקביל יחיד ל-m זאת סתירה לנתון: לכן: $\alpha = \beta$

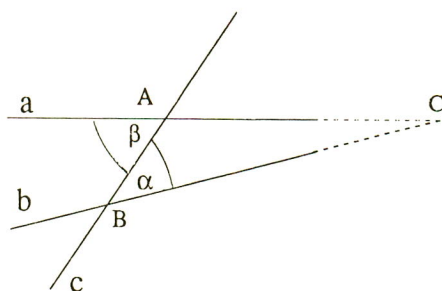
מ.ש.ל.

סעיף 1.2 מאפשר להרחיב את המשפט האחרון: אם שני מקבילים נחתכים ע"י ישר שלישי, אזי כל זוג של זוויות מתאימות שוות זו לזו כל זוג של זוויות מתחלפות שוות זו לזו, וכל זוג של זוויות חד-צדדיות משלימות זו את זו ל-180.

מסקנה מהמשפט

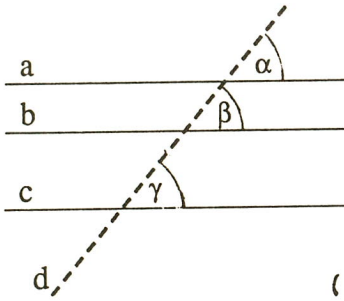
2.5

אם שני ישרים a ו-b נחתכים על-ידי ישר שלישי c וקיים זוג זוויות מתחלפות שאינן שוות, הישרים a ו-b אינם מקבילים.



הסבר
 המצב $a \parallel b$ לא יתכן, כי אז לפי 2.4 מתקבל $\alpha = \beta$ דבר הסותר את הנתון.
 לפיכך a ו-b נפגשים.
 נקודת החיתוך של a ו-b תמצא מאותו צד של החותך כמו הזוויות הקטנה מבין השתיים.
 למשל, אם $\alpha < \beta$, הישרים יפגשו בנקודה C. באופן כזה β - החיצונית ל- $\triangle ABC$ תהיה גדולה מ- α .

2.6 בעיות שימושיות



א, שני ישרים a ו- b, המקבילים כל אחד לישר שלישי c, מקבילים זה לזה.

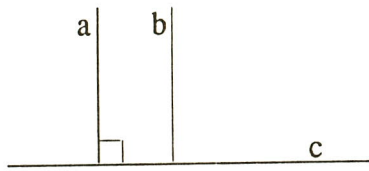
נשרטט ישר עזר d, החותך את שלושת הישרים. מתקבל:

$$\alpha = \gamma \quad (\text{מתאימות בין מקבילים})$$

$$\beta = \gamma \quad (\text{מתאימות בין מקבילים})$$

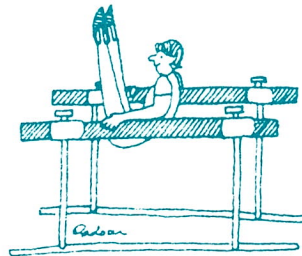
$$\alpha = \beta \quad (\text{חוק ההעברה})$$

$$a \parallel b \quad (\text{לפי המשפט הישר - 2.3})$$



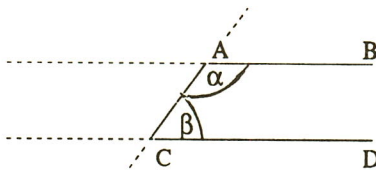
ב. אם אחד משני ישרים מקבילים a ו- b מאונך לישר שלישי c ($a \perp c$), אז גם הישר המקביל לו מאונך לישר השלישי, כלומר $b \perp c$.

ג. אם שני ישרים a ו- b מאונכים כל אחד לישר שלישי c, אזי הישרים a ו- b מקבילים.



2.7 שיטות פתרון

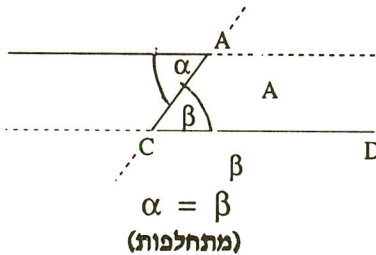
א. ברוב הבעיות, הקשורות לנושא המקבילים, לא מופיע השרטוט השלם של הישרים הנחתכים והישר החותך. לרוב מופיעים קטעים, שיוצרים את זוגות הזוויות שהגדרנו. היות ובשלב הראשון קשה לזהות את המערכת הנ"ל של נחתכים וחותר, מומלץ להאריך - לפחות בפתרון בעיות ראשונות - את הקטעים הקיימים, כך שתקבל המערכת השלמה.



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

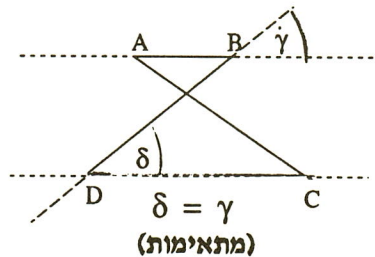
(חד צדדיות פנימיות)

בשרטוטים הבאים AB ו-CD מקבילים. אם נאריך את הקטעים בקווים מרוסקים, נוזה צמדי זוויות ותכונותיהן:



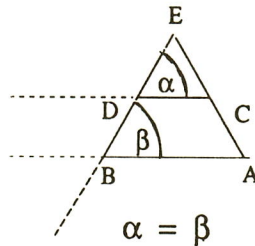
$$\alpha = \beta$$

(מתחלפות)



$$\delta = \gamma$$

(מתאימות)

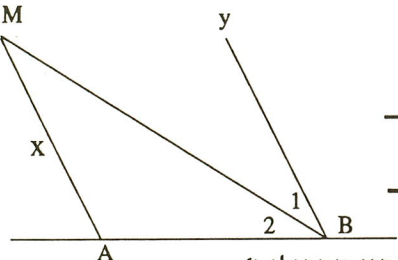


$$\alpha = \beta$$

(מתאימות)

ב. בבעיות רבות מבחינים בקשר בין קיום:

1. משולש שווה-שוקיים, 2. חוצה זווית, 3. ישרים מקבילים, באופן כזה שקיים שניים מהמרכיבים הנ"ל גובר את קיומו של השלישי.
- למשל, אם נתון בבעיה שהקטע BM הוא חוצה זווית B, והקטע AM מקביל ל-By, מתקבל שהמשולש MAB הוא משולש שווה-שוקיים.

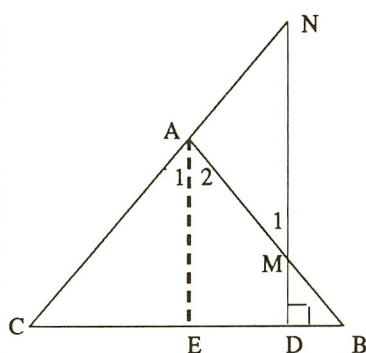


נתון	$\angle B_1 = \angle B_2$, $Ax \parallel By$
צ"ל	$\triangle AMB$ שר"ש
הוכחה	(נתון) $Ax \parallel By$ (מתחלפות בין מקבילים) $\angle M = \angle B_1 \Leftarrow$ (נתון) $\angle B_1 = \angle B_2$ (חוק ההעברה) $\angle M = \angle B_2 \Leftarrow$ (מול זוויות שוות - צלעות שוות). $MA = AB \Leftarrow$ מ.ש.ל.

באותו אופן נוכל למצוא את השלושה הנ"ל, בבעיה קצת יותר מורכבת.

דוגמה

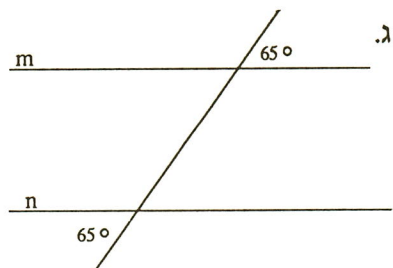
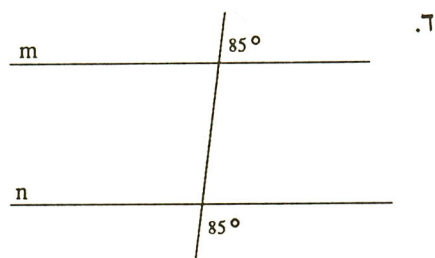
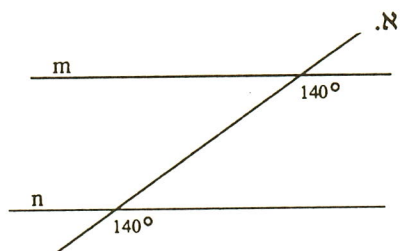
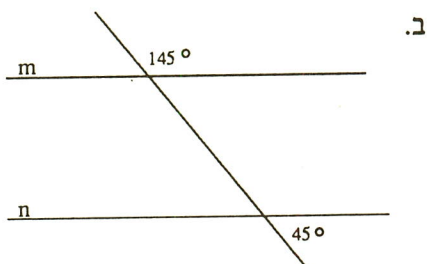
M נקודה על השוק AB של משולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$).
נתון $MD \perp BC$ המשקי
MD ו-AC נפגשים ב-N.
הוכח $AM = AN$.



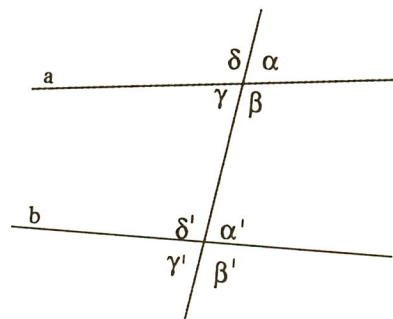
הוכחה
ב"ע: $\angle A_1 = \angle A_2$
 $AE \perp BC \Leftarrow$
וכן $ND \perp BC$
 $AE \parallel ND \Leftarrow$
לכן $\angle M_1 = \angle A_2$ (מתחלפות)
 $\angle N = \angle A_1$ (מתאימות)
לפי ב"ע: $\angle A_1 = \angle A_2$
 $\angle M_1 = \angle N$ (חוק ההעברה)
 $AN = AM \Leftarrow$
מ.ש.ל.

תרגילים

1. באלו מהשרטוטים הבאים אפשר לקבוע שהישרים m ו-n מקבילים. נמק!



2. באלו מהסעיפים הבאים תוכל לקבוע שהישרים a ו-b מקבילים.



א - $\alpha = 55^\circ$ $\gamma' = 55^\circ$

ב - $\delta = 100^\circ$ $\gamma' = 100^\circ$

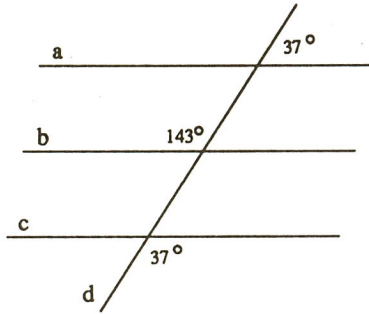
ג - $\delta = 95^\circ$ $\delta' = 85^\circ$

ד - $\beta = 77^\circ$ $\delta' = 77^\circ$

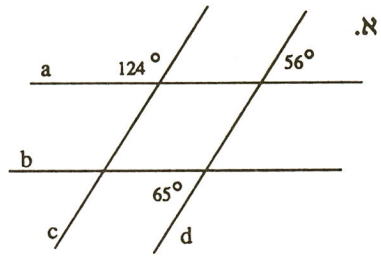
ה - $\beta' = 62^\circ$ $\delta = 118^\circ$

ו - $\alpha' = 75^\circ$ $\delta = 105^\circ$

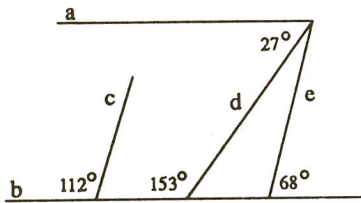
3. קבע אלו מבין הישרים שבשרטוטים הבאים מקבילים. נמק!



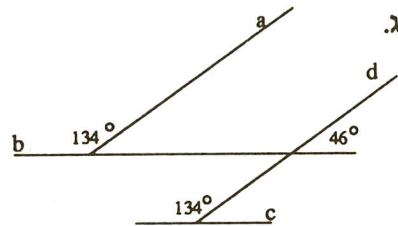
א.



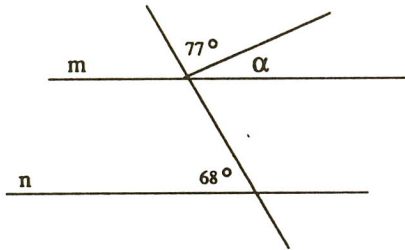
ב.



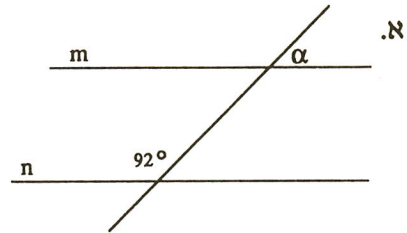
ג.



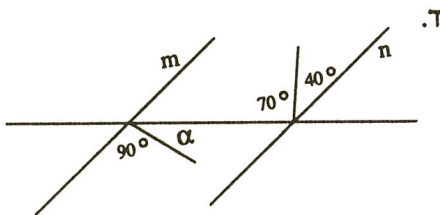
4. הישרים m ו-n שבשרטוט מקבילים. חשב את הזווית α .



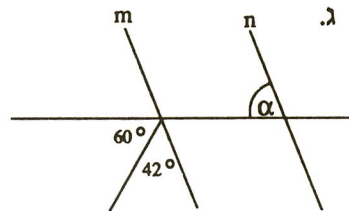
א.



ב.

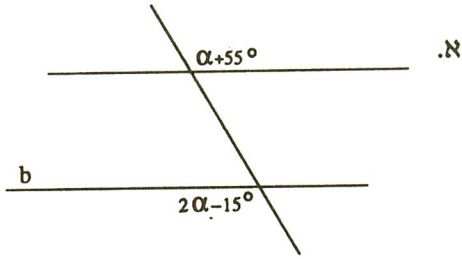


ג.



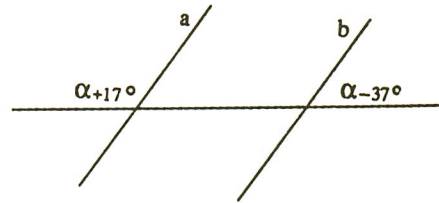
ד.

5. חשב את α , כאשר ידוע $a \parallel b$

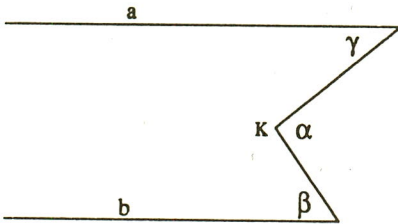


ב.

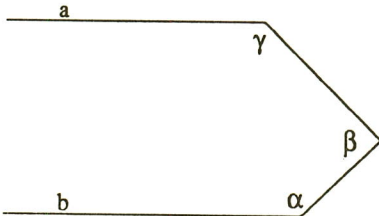
ג.



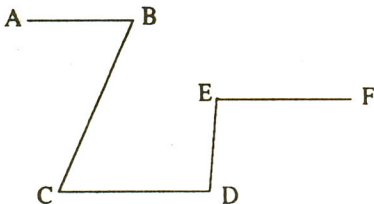
6. בשרטוט נתון: $a \parallel b$
הוכח כי $\alpha = \beta + \gamma$
רמז: העבר מקביל ל- a דרך K .

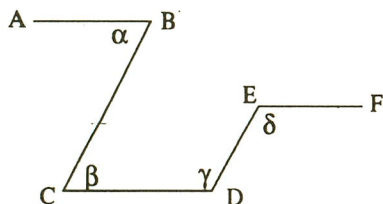


7. בשרטוט נתון $a \parallel b$
הוכח: $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$



8. בקו השבור ABCDEF, יש שני זוגות של קטעים מקבילים: $AB \parallel CD$, $CD \parallel EF$. האם תוכל לקבל זוג נוסף של מקבילים, ע"ס נתון זה. נמק!





9. בשרטוט נתון: $AB \parallel CD \parallel EF$
 $BC \parallel ED$. התיחס לזוויות α, β, γ ,
 ו- δ שבשרטוט וחשב בכל סעיף את

3 הזוויות האחרות:

א- $\alpha = 42^\circ$

ב- $\delta = 100^\circ$

ג- $\beta = 37^\circ$

10. בתנאי הבעיה הקודמת מצא קשר בין:

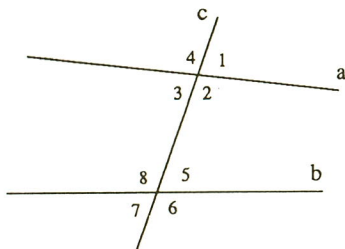
א - α ו- β

ב - β ו- γ

ג - β ו- δ

ד - γ ו- α

ה - δ ו- α



11. הישרים a ו-b נחתכים ע"י ישר c.

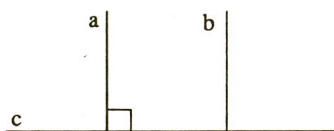
נתון: $\angle 2 + \angle 5 < 180^\circ$.

הוכח: $\angle 3 + \angle 8 > 180^\circ$.

12. בבעיה הנ"ל, האם יפגשו הישרים a ו-b? אם כן באיזה צד של הישר c?

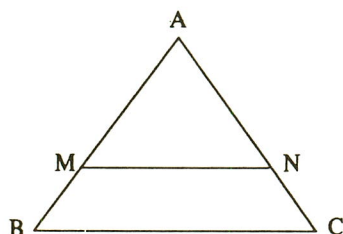
13. שני ישרים a ו-b נחתכים ע"י ישר c (התיחס לשרטוט הקודם). נתון $\angle 2 = 80^\circ$,
 $\angle 8 = 20^\circ$. היפגשו הישרים a ו-b? אם כן באיזה צד של c?

14. התיחס לשרטוט של בעיה 11, כאשר נתון $\angle 1 = 68^\circ$, $\angle 8 = 45^\circ$. האם יפגשו
 הישרים a ו-b. אם כן באיזה צד של c?

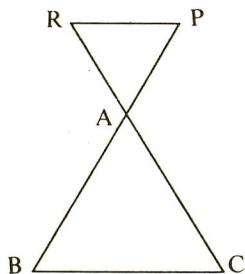


15. הוכח: אם אחד משני ישרים מקבילים, מאונך לישר שלישי, אזי גם המקביל לו מאונך לישר השלישי, כלומר אם $a \perp c$ אז $b \perp c$, $a \parallel b$

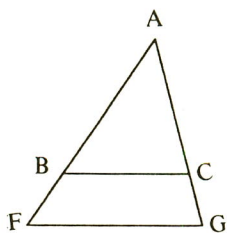
16. הוכח: אם שני ישרים מאונכים כ"א לישר שלישי, הרי הם מקבילים זה לזה.



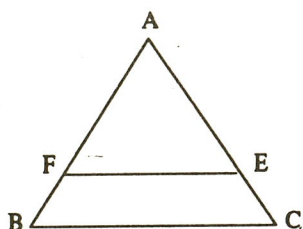
17. במשולש ABC, M נקודה על AB. העבירו מקביל MN לצלע BC. הוכח כי זוויות המשולש AMN שוות בהתאמה לזוויות המשולש ABC.



18. במשולש ABC המשיכו את צלעותיו CA ו-BA, מעבר לקודקוד A עד לנקודות R ו-P, באופן כזה, ש $PR \parallel BC$. הוכח, כי זוויות המשולשים ABC ו-ARP, שוות בהתאמה.

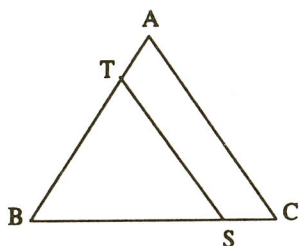


19. על המשך הצלע AB של $\triangle ABC$ בנו זווית BFG השווה לזווית ABC. הוכח: $\angle ACB = \angle CGF$.

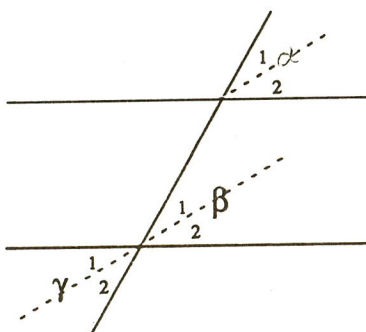


20. נתון משולש שווה-שוק ABC ($AB = AC$).
דרך הנקודה F שעל שוק AB , העבירו ישר FE
מקביל לבסיס המשולש. הוכח כי גם
משולש AFE הוא שווה-שוקיים.

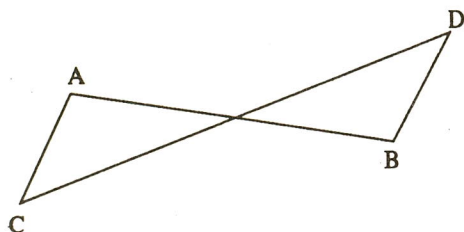
21. שרטט והסק את המסקנה לגבי נתוני
בעיה 20, כאשר F מונחת על המשך של
 AB , מעבר ל- B .



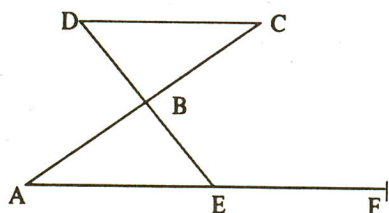
22. נתון משולש שווה-שוקיים ABC ($AC = AB$).
נקודה T נקודה על שוק AB של
המשולש. נתון $TS \parallel AC$.
הוכח $\triangle BTS$ - שווה-שוקיים.
פתור את הבעיה גם כאשר T נמצאת
בהמשך AB , מצד B ו- S בהמשך CB .



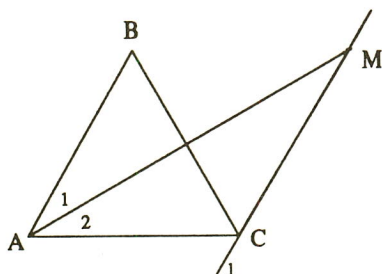
23. הוכח: אם הישרים a ו- b מקבילים,
וישר c חותך אותם, יהיו מקבילים גם:
א - החוצים של הזוויות המתאימות;
למשל α ו- β
ב - החוצים של הזוויות המתחלפות.
למשל α ו- γ



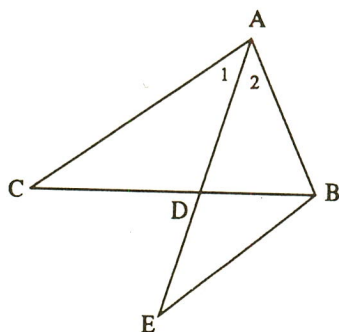
24. בתנאי הבעיה הקודמת, הוכח כי
החוצים של זוויות חד-צדדיות (או
המשכיהם), מאונכים זה לזה.
25. הוכח: אם שני קטעים AB ו- CD חוצים
זה את זה, מתקבל $AC \parallel BD$.



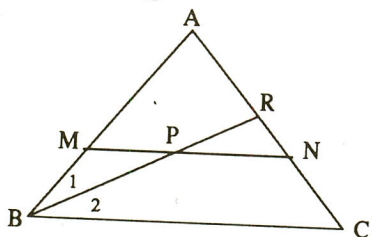
26. בשרטוט נתון $\angle D = 65^\circ$,
 $AE = EF$, $AB = BC$, $\angle BEF = 115^\circ$
 הוכח: $DC = EF$.



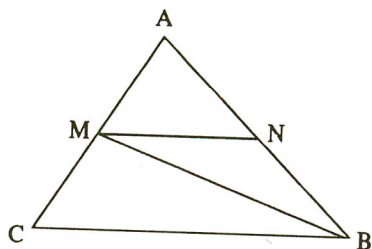
27. נתון $\triangle ABC$, $CM \parallel AB$,
 $CM = AC$
 הוכח $\angle A_1 = \angle A_2$



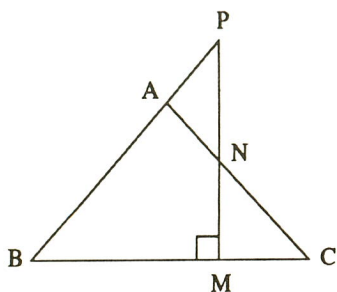
28. במשולש ABC חוצה-הזווית AD .
 דרך B עוברת קרן, החותכת את המשך
 AD בנקודה E , $AB = BE$.
 הוכח: $EB \parallel AC$.



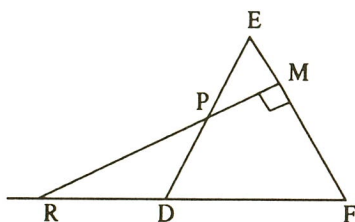
29. במשולש ABC נתון, $MN \parallel BC$,
 $\angle B_1 = \angle B_2$. הוכח כי $\triangle MPB$ הוא שו"ש



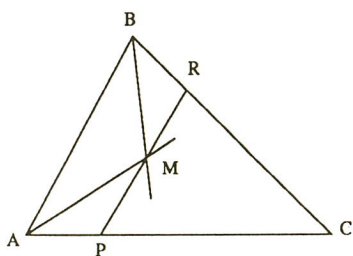
30. במשולש ABC , BM חוצה את הזווית
 B . דרך M עובר מקביל ל- BC $MN \parallel BC$.
 הוכח כי $AB = AN + MN$
 (רמז: הוכח $MN = NB$).



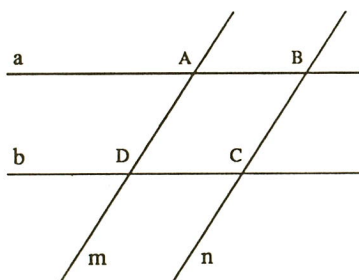
31. בנקודה M, על בסיסו של משולש שוו"ש ABC ($AB = AC$), העלו אנך לבסיס: $NM \perp BC$. האנך חותך את המשך BA בנקודה P. הוכח: $AP = AN$. רמז: בנה אנך מ-A ל-BC.



32. M נקודה על הצלע EF במשולש DEF. בנקודה זו הועלה לצלע EF אנך, החותך את DE בנקודה P, ואת המשך צלע FD - בנקודה R. נתון $DP = DR$. הוכח $ED = DF$.



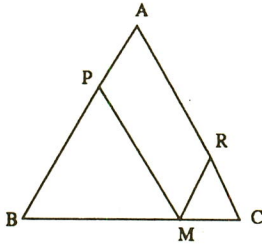
33*. חוצי-הזוויות A ו-B במשולש ABC, נפגשים בנקודה M. דרך M עובר קטע $PR \parallel AB$. הוכח כי היקף המשולש CPR שווה לסכום הצלעות AC ו-CB.



34*. הוכח: אם שני ישרים מקבילים a ו-b חותכים שני ישרים מקבילים אחרים m ו-n, הרי מתקבלים קטעים שווים זה לזה על החותכים, וקטעים שווים זה לזה על הנחתכים, כלומר $AD = BC$, $CD = AB$. רמז: חבר את A ל-C.



35* הוכח את המשפט ההפוך לבעיה הקודמת, כלומר אם מתקיימים השוויונים $AD = BC$, $AB = CD$ הרי שני זוגות הישרים מקבילים.

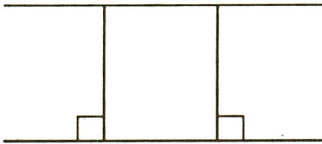


36** M היא נקודה על הבסיס BC של

משולש שווה-שוקיים ABC.

נתון: $MP \parallel AC$, $MR \parallel AB$.

הוכח: סכום הקטעים $MP + MR$ הוא גודל קבוע ושווה לשוק המשולש שווה-השוקיים.



37* הוכח: אם שני ישרים מקבילים, אזי

כל הנוקודות על ישר אחד נמצאות

ברוחקים שווים מהישר האחר, כלומר

המרחק בין שני ישרים מקבילים הוא

גודל קבוע.

(רמז: העזר בבעיה 34 כאשר הישרים

m ו- n מאונכים לישרים a ו- b).

תשובות

- 1) בסעיפים א, ג- הישרים מקבילים: 2) הישרים מקבילים
- בסעיפים א, ד, ו; 3) א - $clld$; ב - $allb$; ג - $blld$; ד - $allb, clld$
- 4) א - 88° ; ב - 35° ; ג - 78° ; ד - 20° ; ד - $allb, clld$
- 5) א - 70° ; ב - 100° ; ג - אין פתרון; 8) $AB \parallel EF$
- 10) א - $\alpha = \beta$; ב - $\beta + \gamma = 180^\circ$; ג - $\beta + \delta = 180^\circ$; ד - $\alpha + \gamma = 180^\circ$
- ה - $\alpha + \delta = 180^\circ$; 12) יפגשו מצד ימין; 13) יפגשו בצד שמאל; 14) יפגשו בצד שמאל;

3. תוצאות

3.1 משפט

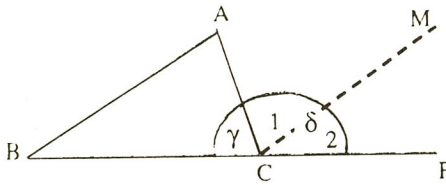


זווית חיצונית למשולש, שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

3.2 משפט



סכום הזוויות הפנימיות במשולש הוא גודל קבוע, ושווה ל- 180° (או $2d$)



הוכחה

נמשיך את צלע BC

של $\triangle ABC$ ונבנה דרך C מקביל

ל- $AB : CM \parallel AB$.

$\delta_2 = \angle B$ (מתאימות)

$\delta_1 = \angle A$ (מתחלפות)

$\delta_1 + \delta_2 = \angle A + \angle B$ (חיבור שוויונים)

או $\delta = \angle A + \angle B$

בכך הוכחנו את המשפט הראשון.

$$\delta + \gamma = 180^\circ$$

$$\text{או } \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

בכך הוכחנו את המשפט השני.

3.3 מסקנות

א. משפט חפיפה חמישי

אם בשני משולשים, שוות בהתאמה: צלע, זווית שע"י הצלע וזווית שמול הצלע הנ"ל, אזי המשולשים חופפים.

את המסקנה הזאת מקובל לראות כמשפט חפיפה חמישי, או כספח של משפט חפיפה שני, תוך שימוש במשפט על סכום זוויות המשולש. בסיכום, ניתן לומר, שאם בשני משולשים, שוות בהתאמה, צלע ושתי זוויות (בלי לציין מיקומן), הרי המשולשים חופפים. למרות זאת, מקובל להפריד את משפט חפיפה שני ולנסוחו כפי שלמדנו.

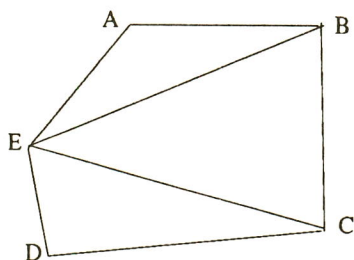
- ב. במשולש ישר-זווית, שווה סכום הזוויות החדות ל- 90° . נמק!
- ג. במשולש ישר-זווית ושווה-שוקיים, שווה כל זווית חדה ל- 45° .
- ד. במשולש קהה-זווית, קטן סכום הזוויות החדות מ- 90° .
- ה. במשולש שו"צ כל זווית היא בת 60° .
- ו. משולש שו"ש ובו אחת הזוויות שווה ל- 60° , הוא משולש שו"צ.
- ז. שני משולשים שווי-שוקיים, השווים בזווית בסיס אחת, או בזווית הראש, שווים בכל זוויותיהם.

3.4 משפט



סכום הזוויות הפנימיות במצולע בעל n צלעות נתון בבטוי

$$180^\circ (n - 2) \quad \text{או} \quad 2d(n-2)$$



הסבר

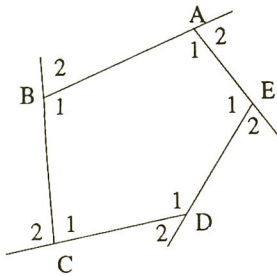
האלכסונים היוצאים מקודקוד אחד במצולע, יוצרים $(n - 2)$ משולשים. לכן, סכום הזוויות:

$$180^\circ (n - 2) \quad \text{או} \quad 2d(n - 2).$$

3.5

מסקנות מהמשפט :

- א. במצולע משוכלל בעל n צלעות, נתון גודלה של זווית אחת בבטוי
- $$\frac{180^\circ (n - 2)}{n}$$
- ב. סכום הזוויות החיצוניות של מצולע קמור הוא גודל קבוע ושווה ל- $4d$ או 360°



הסבר

בכל אחד מקודקודי המצולע, נוצרו שתי זוויות צמודות - פנימית וחיצונית - וסכומן 180° .
 סכום כל n זוגות הזוויות הנ"ל $n \cdot 180^\circ$.
 סכום הזוויות הפנימיות $180^\circ (n - 2)$.

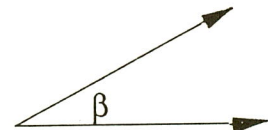
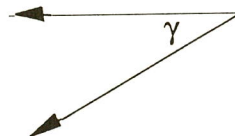
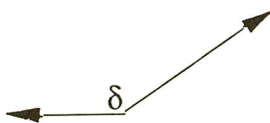
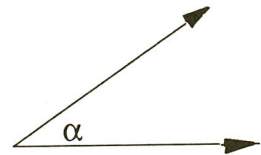
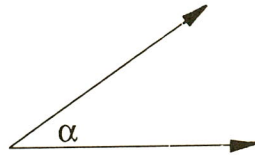
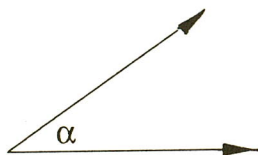
$$180^\circ n - 180^\circ (n - 2) = 180^\circ n - 180^\circ n + 360^\circ = 360^\circ$$

3.6 משפט



זוויות ששוקיהן מקבילות בהתאמה, שתיהן באותם כיוונים, או שתיהן בכיוונים מנוגדים (אנטימקבילות) שוות זו לזו.
זוויות ששוקיהן מקבילות בהתאמה, זוג אחד באותו כיוון והשני בכיוונים מנוגדים, משלימות זו את זו ל- 180° .

כיוון שוק של זווית הוא מהקודקוד אל החלק הבלתי מוגבל של הקרן.



ג. זוג שוקיים באותו כוון, וזוג שני בכיוונים מנוגדים.
 $\alpha + \delta = 180^\circ$

ב. שתי השוקיים בכיוונים מנוגדים - אנטימקבילות.
 $\alpha = \gamma$

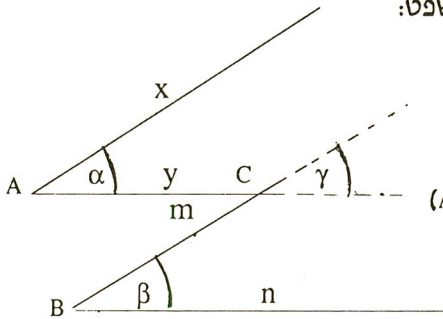
א. שתי השוקיים באותם כיוונים.
 $\alpha = \beta$

נוכיח את המקרה הראשון המוזכר במשפט:

בי"ע: נמשיך את Bm ו- Ay

עד שהן נחתכות ב- C .

מתקבל:



$$\alpha = \gamma \quad (\text{מתאימות בין } Ax \parallel Bm)$$

$$\text{וכן } \beta = \gamma \quad (\text{מתאימות בין } Ay \parallel Bn)$$

$$\alpha = \beta \quad (\text{חוק ההעברה}) \Leftarrow$$

הוכח את שני המקרים האחרים (אפשר להעזר בסעיף הנייל).

3.7 בעיות שמידת השימוש בהן רבה.

א. הוכח: במשולש ישר-זווית, התיכון ליתר שווה למחצית היתר.

נתון $\triangle ABC$ ישר זווית ($\sphericalangle C = 90^\circ$).

לצורך הוכחת הטענה, לא נבנה את

התיכון ליתר, אלא קטע CD כך ש- $\sphericalangle C_1 = \sphericalangle A$

ובמהלך ההוכחה יתברר שקטע זה הוא תיכון.

ב- $\triangle ABC$:

$$\sphericalangle B = 90^\circ - \sphericalangle A$$

$$\sphericalangle C_2 = 90^\circ - \sphericalangle C_1$$

$$\text{לפי בי"ע } \sphericalangle A = \sphericalangle C_1$$

$$\sphericalangle B = \sphericalangle C_2 \Leftarrow$$

$$\Leftarrow BD = DC \quad (\text{מול זוויות שוות צלעות שוות})$$

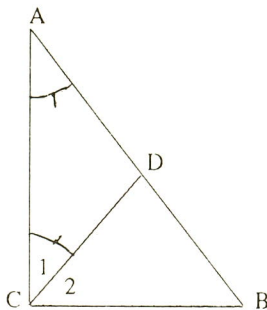
$$\text{וכן } AD = DC \quad (\text{מתקבל מבי"ע})$$

ומשני השוויונים האחרונים מקבלים

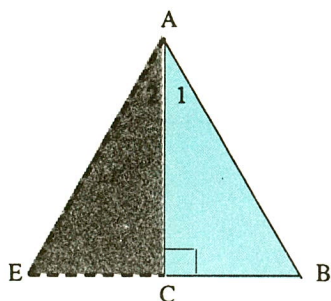
$$BD = AD \quad (\text{כלומר } CD \text{ הוא תיכון})$$

$$\Leftarrow CD = AD = BD = \frac{AB}{2}$$

כלומר התיכון ליתר שווה למחצית היתר.

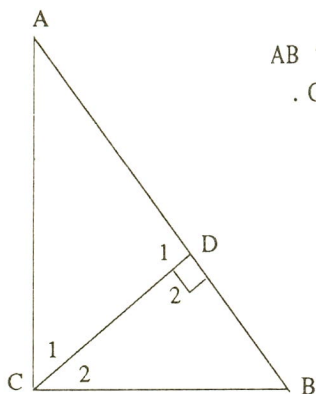


ב. במשולש ישר-זווית, שבו זווית חדה בת 30° , הניצב שמול הזווית הזו שווה למחצית היתר.



נתון	$\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$
צ"ל	$BC = \frac{AB}{2}$
הוכחה	ב"ע: נמשיך את BC כאורכו ונחבר אותו ל-A. $\triangle AEC \cong \triangle ABC$ (נמק!) $\angle A_2 = \angle A_1$ וכן $AE = AB \Leftarrow$ ונתון $\angle A_1 = 30^\circ$ ולכן $\angle A = 60^\circ$ $\triangle ABE$ הוא שווה-צלעות, $\Leftarrow$ לכן $BE = AB$ או $BC = \frac{BE}{2} = \frac{AB}{2}$

ג. במשולש ישר-זווית, הגובה ליתר מחלק את המשולש לשני משולשים, שזוויותיהם שוות בהתאמה וכן שוות לזוויות המשולש המקורי.



נתון משולש ישר זווית ABC ו-CD גובה ליתר AB
 נוכיח שוויון בין זוויות המשולשים ACD ו- CBD.
 (כי $\angle C = 90^\circ$) $\angle C_1 + \angle C_2 = 90^\circ$
 (כי $\angle D_1 = 90^\circ$) $\angle C_1 + \angle A = 90^\circ$
 (1) $\angle C_2 = \angle A \Leftarrow$

באותה צורה מתקבל:

(2) $\angle C_1 = \angle B$
 (3) $\angle D_1 + \angle D_2 = 90^\circ$

הראה שוויון בין זוויות משולש חלקי ושלם!

3.8 דוגמה א'

משולש שווש, $\triangle ABC$ ($AB = AC$), חוצה הזווית C. $\angle D_1 = 72^\circ$, חשב את זוויות המשולשים $\triangle ABC$ ו- $\triangle ADC$.

לצורך החישוב נסמן $\angle C_1 = x$ ואז $\angle B = 2x$

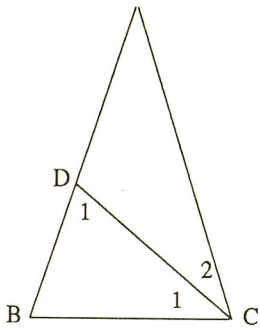
$$\angle D_1 + \angle C_1 + \angle B = 180^\circ$$

$$72^\circ + x + 2x = 180^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$$

$\angle B = 72^\circ$ כלומר $\triangle ABC$ שווש.

נחשב את $\angle A$

$$\angle D_1 = \angle A + \angle C_2$$

$$\angle A = 72^\circ - 36^\circ = 36^\circ$$


דוגמה ב'

במשולש ABC נתון: BD חוצה-זווית B; AM חוצה הזווית החיצונית ל-A (נקודת החיתוך של שני חוצי הזוויות). הוכח: $\angle C = 2\angle M$.

לפתרון הבעיה, נעזר בחישובי זוויות.

ב- $\triangle ABC$:

$$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B)$$

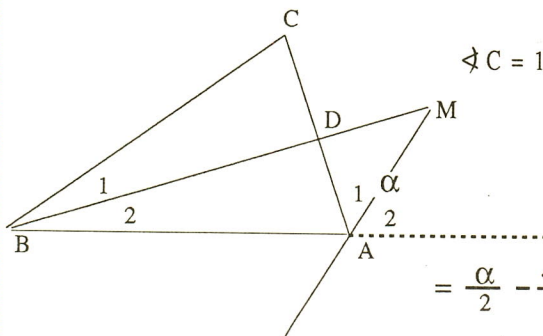
חיצונית ל- $\triangle BMA$:

$$\alpha_2 = \angle M + \angle B_2$$

$$\angle M = \alpha_2 - \angle B_2$$

$$= \frac{\alpha}{2} - \frac{\angle B}{2} = \frac{180^\circ - \angle A - \angle B}{2} = \frac{180^\circ - (\angle A + \angle B)}{2} = \frac{\angle C}{2}$$

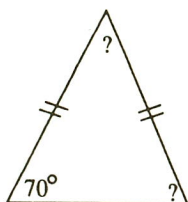
מ.ש.ל. $\Rightarrow \angle C = 2\angle M$



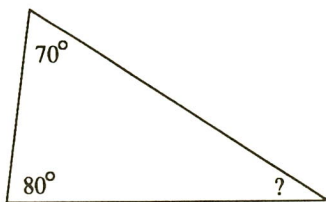
תרגילים

1. חשב את זוויות המשולש. התייחס לנתונים בכל שרטוט.

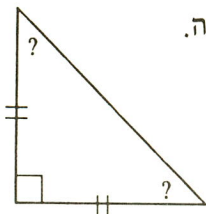
ב.



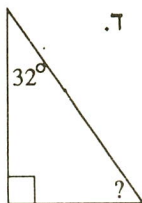
א.



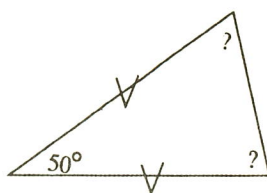
ה.



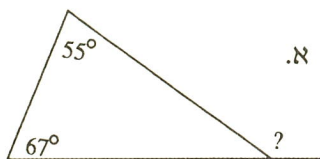
ד.



ג.

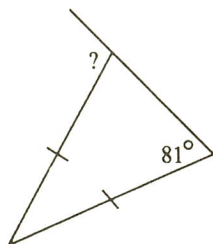


א.

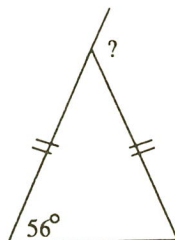


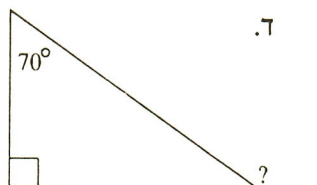
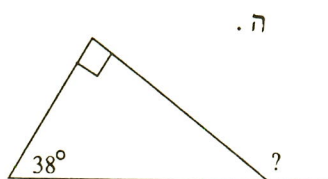
2. חשב את הזווית החיצונית המבוקשת.

ג.

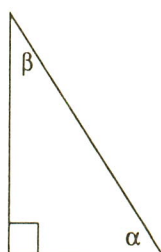
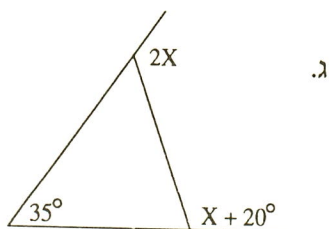
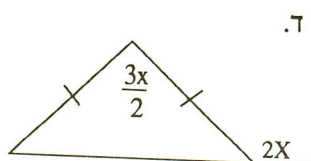
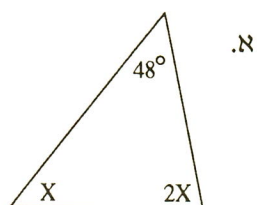
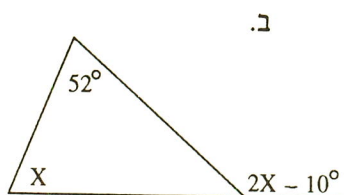


ב.

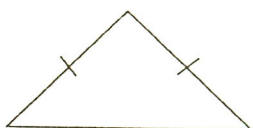




3. חשב את X

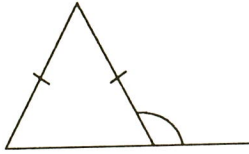


4. במשולש ישר זווית גדולה הזווית α מהזווית δ : א - פי 4; ב - פי 5.
חשב את זוויות המשולש.

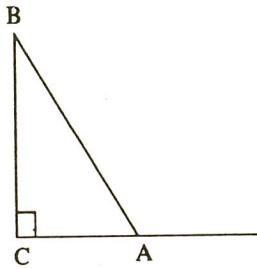


5. במשולש שווה-שוקיים, מהווה זווית הבסיס, מחצית מזווית הראש.
חשב את זוויות המשולש.

6. זווית חיצונית למשולש שווה-שוקיים
(בקודקוד בסיס) גדולה פי שנים:
א. מזווית הראש; ב. מזווית הבסיס.
חשב את הזווית המשולש ואת
הזווית החיצונית.



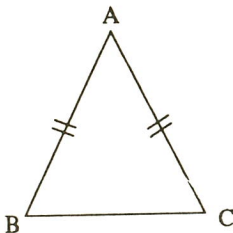
7. במשולש ישר-זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$),
גדולה הזווית החיצונית בנקודה A , פי
 $2\frac{1}{2}$ מזווית B .
חשב את הזווית החיצונית.



8. אחת הזוויות במשולש שווה-שוקיים, היא בת 72° . חשב את יתר הזוויות.
כמה פתרונות לבעיה?

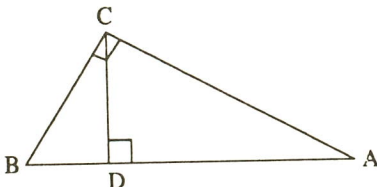
9. במשולש ABC , נתון $\angle A = 51^\circ 44'$, $\angle B = 38^\circ 16'$. איזה סוג משולש זה?

10. במשולש ABC , נתון $\angle B = 38^\circ 12'$, $\angle A = 77^\circ 58'$. חשב את $\angle C$.

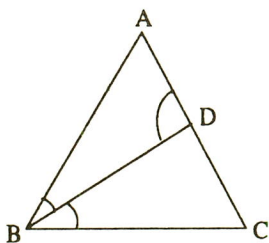


11. במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$) נתון
 $\angle B = 77^\circ 58'$. חשב את $\angle A$.

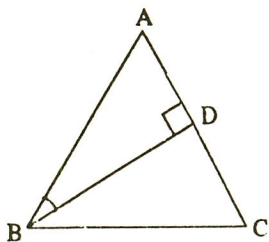
12. חשב זווית בסיס במשולש שווה-שוקיים, שבו זווית הראש בת $101^\circ 54'$.



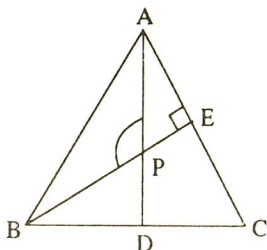
13. במשולש ישר-זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$)
יוצר הגובה ליתר - CD , זווית בת d ,
עם הניצב BC . חשב את הזוויות A ו- B .



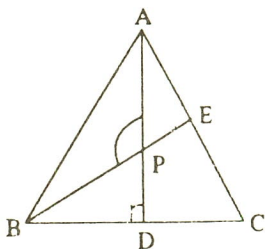
14. במשולש שווה-שוקיים ABC
 $(AB = AC)$, BD חוצה-זווית B,
 $\angle ADB = 120^\circ$
 חשב את זוויות המשולש ABC.



15. הגובה לשוק אחת במשולש שו"ש, יוצר
 עם השוק האחרת, זווית בת $41^\circ 10'$.
 חשב את זוויות המשולש.

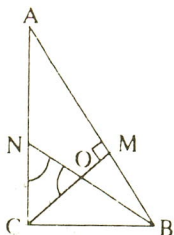


16. ABC משולש שו"ש $(AB = AC)$. הזווית APB
 בין הגבהים AD ו-BE היא בת 108° .
 חשב את זוויות המשולש.

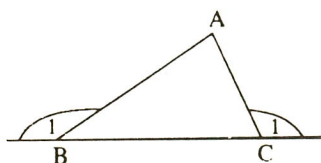


17. ABC משולש שו"ש $(AB = AC)$. הזווית APB
 בין הגובה AD לבין חוצה-זווית הבסיס
 BE, היא בת $115^\circ 36'$. חשב את $\angle A$.

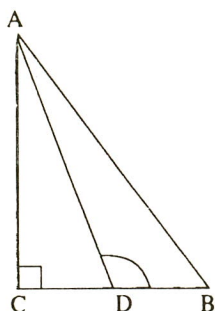
18. זוויות משולש מתייחסות כמו 3:7:8. חשב את הזוויות.



19. במשולש ישר-זווית ABC $(\angle C = 90^\circ)$,
 נפגשים הגובה CM וחוצה הזווית B,
 בנקודה O. הוכח $\angle CNO = \angle CON$.

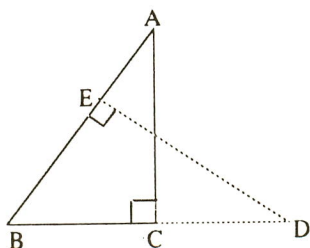


20. $\angle A_1$ ו- $\angle B_1$ חיצוניות ל- $\triangle ABC$.
 נתון: $\angle A = 35^\circ$, $\angle B_1 - \angle C_1 = 15^\circ$,
 חשב את הזוויות $\angle B$ ו- $\angle C$.

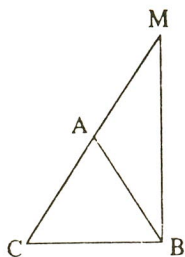


21. במשולש ABC נתון $\angle A = \angle B + \angle C$.
 הוכח, כי המשולש ABC הוא ישר-זווית.

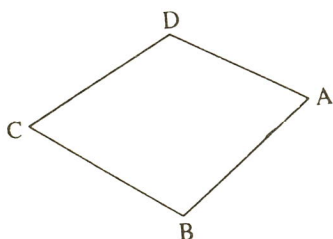
22. במשולש ישר-זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$),
 יוצר חוצה הזווית A - AD - זווית
 $\angle ADB = \alpha$, עם הניצב BC.
 הבע את הזוויות A ו- B באמצעות α .



23. $\triangle ABC$, משולש ישר זווית ($\angle C = 90^\circ$).
 מנקודה D על המשך הניצב BC הורידו
 אנך ליתר $DE \perp AB$.
 הוכח $\angle A = \angle D$.



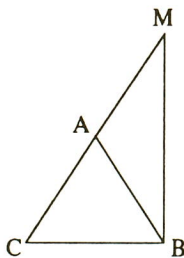
- 24*. הוכח: אם אחד התיכונים במשולש
 שווה למחצית הצלע שהוא חוצה,
 המשולש הוא ישר-זווית (הצלע
 הנחצית הוא יתר).



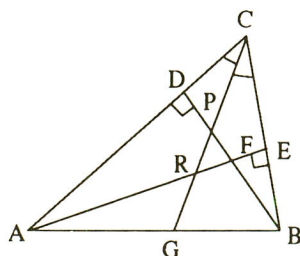
25. במרובע ABCD, נתון $\angle A < 90^\circ$.
 הוכח, כי לפחות אחת מהזוויות B,
 C ו- D קהה.



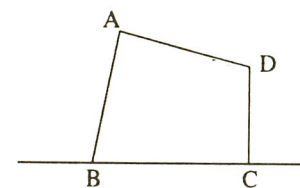
26*. הוכח: אם אחד הניצבים במשולש ישר-זווית שווה למחצית היתר, הרי הזווית שמול הניצב הזה, היא בת 30° .



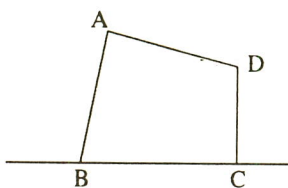
27. $\triangle ABC$ שוו"ש ($AB = AC$). ממשיכים את CA, כך ש: $CA = AM$. הוכח: $MB \perp BC$.



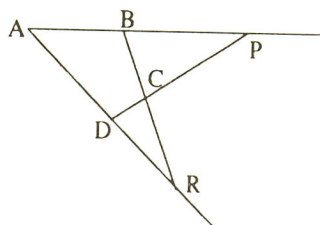
28*. AE ו-BD גבהים במשולש ABC. הוכח כי חוצה הזווית C - CG - יוצר עם הגבהים משולש שווה-שוקיים PFR ($PF = FR$).



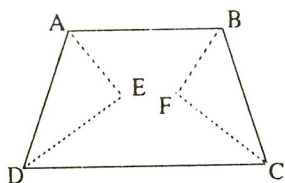
29. הוכח: סכום הזוויות החיצוניות, בנקודות B ו-C, של מרובע ABCD, שווה לסכום הזוויות A ו-D.



30. חשב את זווית המרובע, אם הן מתייחסות כמו 2:5:6:11.



31*. נתון מרובע ABCD. המשכי הצלעות AB ו-DC נפגשים בנקודה P, והמשכי AD ו-BC בנקודה R. הוכח: $\angle P - \angle R = \angle ABC - \angle ADC$.



32* ABCD. מרובע. חוצי הזוויות
 A ו-D נפגשים בנקודה E, ואילו חוצי
 הזוויות B ו-C נחתכים בנקודה F.
 הוכח: $\angle E + \angle F = 180^\circ$.

33. חשב את סכום הזוויות במצולע בעל 5, 6, 10 צלעות.

34. מהו סכום הזוויות החיצוניות במצולעים הנ"ל?

35. חשב את גודלה של זווית, במצולע משוכלל בן 4, 5, 6, 18 צלעות.

36. גודלה של זווית חיצונית אחת, במצולע משוכלל 40° . בן כמה צלעות המצולע?

37. סכום הזוויות במצולע הוא 1800° . בן כמה צלעות המצולע?



38* חשב את השינוי שיחול בסכום זוויות המצולע, אם מספר צלעותיו:

א. יגדל ב-2;

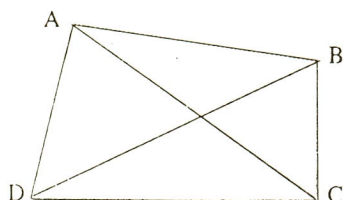
ב. יקטן ב-1.

תשובות

- 1) א- 30° ; ב- $40^\circ, 70^\circ$; ג- $65^\circ, 65^\circ$; ד- 58° ; ה- $45^\circ, 45^\circ$;
- 2) א- 122° ; ב- 112° ; ג- 99° ; ד- 160° ; ה- 128° ;
- 3) א- 44° ; ב- 62° ; ג- 65° ; ד- 72° ;
- 4) א- $72^\circ, 18^\circ$; ב- $75^\circ, 15^\circ$; ג- $45^\circ, 45^\circ$; ד- 90° ;
- 5) א- $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$; ב- $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 120^\circ$; ג- 150° ; ד- 8° ;
- 6) א- $72^\circ, 54^\circ, 54^\circ$; ב- ישר זווית; ג- $63^\circ 50'$; ד- $24^\circ 4'$;
- 7) א- $0.6d, 0.4d$; ב- $0.6d, 0.4d$; ג- $0.6d, 0.4d$; ד- $0.6d, 0.4d$;
- 8) א- $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$; ב- $48^\circ 50'$; ג- $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$; ד- $77^\circ 36'$;
- 9) א- $30^\circ, 70^\circ, 80^\circ$; ב- $80^\circ, 65^\circ$; ג- $270^\circ - 2\alpha$; ד- $2\alpha - 180^\circ$;
- 10) א- $30^\circ, 75^\circ, 90^\circ, 165^\circ$; ב- $1440^\circ, 720^\circ, 540^\circ$; ג- 360° ; ד- 12 ;
- 11) א- $160^\circ, 120^\circ, 108^\circ, 90^\circ$; ב- 9 ; ג- 36 ; ד- 12 ;
- 12) א- יגדל ב- 360° ; ב- יקטן ב- 180° ;

פרק ה: המרובעים

מרובע הוא מצולע בעל ארבע צלעות.



מרכיבי המרובע הם:

- ארבע צלעות
- ארבע זוויות
- שני אלכסונים

(קטעים המחברים קודקודים שאינם מונחים על צלע אחת).

מושגים נוספים שבהם נשתמש בפרק זה הם:

- צלעות סמוכות** - צלעות בעלות קודקוד משותף: AB ו-AD.
- צלעות נגדיות** - צלעות שאין להן קודקוד משותף, כמו AB ו-CD.
- זוויות סמוכות** - זוויות שיש להן שוק משותפת, למשל $\angle A$ ו- $\angle D$.
- זוויות נגדיות** - זוויות שאין להן שוק משותפת, כמו $\angle A$ ו- $\angle C$.

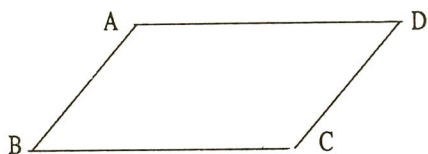
בפרק זה נדון בשני סוגים מיוחדים של מרובעים: המקבילית והטרפז.

1. המקבילית

המקבילית היא מרובע, שבו כל שתי צלעות נגדיות מקבילות.

למקבילית מספר תכונות, המתיחסות לשלושת המרכיבים שלה: זוויות, צלעות ואלכסונים.

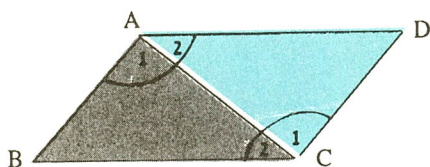
1.1 משפט:
 זוויות סמוכות במקבילית משלימות זו את זו ל- 180° .
 זוויות נגדיות שוות זו לזו.



נתון	מרובע ABCD $AB \parallel CD, AD \parallel BC$
צ"ל	א. $\angle A + \angle D = 180^\circ$ ב. $\angle D = \angle B$
הוכחה	$\angle A + \angle D = 180^\circ$ (זוויות חד-צדדיות בין מקבילים $AB \parallel CD$ ו-AD חותך) מ.ש.ל. א' כמו כן $\angle A + \angle B = 180^\circ$ (זוויות חד-צדדיות בין מקבילים $AD \parallel BC$ ו-AB חותך) $\angle B = \angle D$

מ.ש.ל. ב'

1.2 משפט:
 צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו.



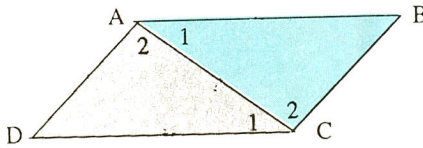
נתון	מרובע ABCD $AB \parallel CD, AD \parallel BC$
צ"ל	$AD = BC, AB = CD$
הוכחה	בי"ע: A - C נבדוק $\triangle ABC$ ו- $\triangle ADC$ $\angle C_1 = \angle A_1$ (מתחלפות בין $AB \parallel CD$ ו-AC חותך) $\angle A_2 = \angle C_2$ (מתחלפות בין $AD \parallel BC$ ו-AC חותך) <u>צלע משותפת AC</u> $\triangle ADC \cong \triangle ABC$ (לפי מ.ח. II) $\left. \begin{array}{l} AB = CD \\ AD = BC \end{array} \right\} \Leftarrow$ (ח. מ. ב. ח.)

מ.ש.ל.

1.5 משפט:



אם הצלעות הנגדיות במרובע שוות זו לזו, אזי המרובע הוא מקבילית.



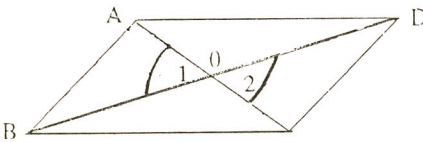
נתון	מרובע ABCD $AD = BC, AB = CD$
צ"ל	ABCD מקבילית
הוכחה	בי"ע: אלכסון AC. נבדוק $\triangle ABC$ ו- $\triangle ADC$: נתון $\begin{cases} CD = AB \\ AD = BC \end{cases}$ AC צלע משותפת $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ (מ.ח. III) $\angle C_1 = \angle A_1 \Leftarrow$ (ח.מ.ב.ח.) $CD \parallel AB$ (נמק!) $\angle A_2 = \angle C_2$ (מהחפיפה) $AD \parallel BC$ (נמק!) ABCD מקבילית (לפי ההגדרה)

מ.ש.ל.

1.6 משפט:



אם אלכסוני מרובע חוצים זה את זה, הרי המרובע הוא מקבילית.



נתון	מרובע ABCD, $BO = DO, AO = CO$
צ"ל	ABCD מקבילית
הוכחה	ב- $\triangle ABO$ ו- $\triangle CDO$: $AO = CO$ $BO = DO$ $\angle O_1 = \angle O_2$ (קודקודיות) $\triangle ABO \cong \triangle CDO$ (לפי מ.ח. I) $AB = CD$ (ח.מ.ב.ח.)

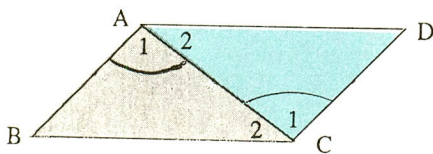
כמו כן $\triangle ADO \cong \triangle BCO$ (הוכח!)
 $AD = BC \Leftarrow$ (ח.מ.ב.ח.)
 $ABCD$ מקבילית $\Leftarrow$
 (לפי המשפט האחרון, מרובע שבו הצלעות הנגדיות שוות זו לזו,
 המרובע הוא מקבילית).

מ.ש.ל.

1.7 משפט:



אם זוג צלעות נגדיות במרובע שוות זו לזו וגם מקבילות,
 המרובע הוא מקבילית.



נתון	מרובע $ABCD$, $AB \parallel CD, AB = CD$
צ"ל	$ABCD$ מקבילית
הוכחה	נתבונן במשולשים ABC ו- ADC: $AC = AC$ צלע משותפת $AB = CD$ נתון $\angle A_1 = \angle C_1$ (מתחלפות בין $AB \parallel CD$ וחיתך AC) $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ (לפי מ.ח.י.) $\angle C_2 = \angle A_2$ (ח.מ.ב.ח.) $BC \parallel AD$ (אם הזוויות המתחלפות שוות, הישרים מקבילים) וכן $AB \parallel CD$ (נתון) $ABCD$ מקבילית (לפי ההגדרה)

מ.ש.ל.

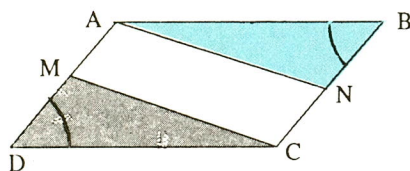
הדבר המשותף לכל המשפטים ההפוכים, זאת המסקנה שלהם (סעיף צ"ל),
 והיא: **מרובע - בתנאים מסויימים - הוא מקבילית.**

משפטים אלה מאפשרים לבדוק, אם מרובע מסוים הוא מקבילית, לא רק לפי
 ההגדרה - צלעות נגדיות מקבילות - אלא ע"ס נתונים אחרים, כמו צלעות נגדיות
 שוות, וכו'.

המשפט האחרון מאפשר לזהות מקבילית, למרות שהוא איננו הפוך לאף אחד
 מהמשפטים, שמתארים את תכונות המקבילית.

דוגמאות לבעיות ופתרונן דוגמה א'

במקבילית ABCD, הקצו על הצלעות הנגדיות שלה AD ו-BC, קטעים שווים $DM = BN$. הוכח: $AN = CM$.

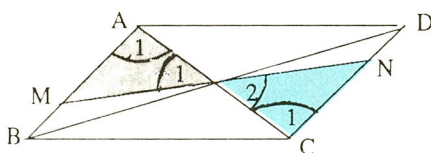


נתון	מרובע ABCD, $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$ $DM = BN$
צ"ל	$AN = CM$
הוכחה	ב- $\triangle ABN$ ו- $\triangle CDM$ $AB = CD$ (צלעות נגדיות) $BN = DM$ (נתון) $\angle B = \angle D$ (זוויות נגדיות) $\triangle ABN \cong \triangle CDM$ (לפי מ.ח. I) $AN = CM$ (ח.מ.ב.ח.)

מ.ש.ל.

דוגמה ב'

במקבילית ABCD, O נקודת פגישת האלכסונים. M נקודה על AB. המשיך הקטע MO, חותך את CD ב-N. הוכח כי: $MO = NO$.



נתון	מרובע ABCD, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$ M על AB
צ"ל	$MO = NO$
הוכחה	נבדוק את המשולשים: AOM ו- CON $AO = CO$ (האלכסונים במקבילית חוצים זה את זה) $\angle A_1 = \angle C_1$ (מתחלפות בין $AB \parallel CD$ וחותר AC) $\angle O_1 = \angle O_2$ (קודקודיות) מתקבל: $\triangle AOM \cong \triangle CON$ $MO = NO$ (ח.מ.ב.ח.)

מ.ש.ל.

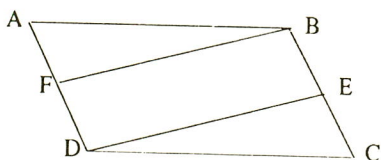
בדוגמה א' ראינו שימוש במשפטים 1.1 ו- 1.2 ובדוגמה ב' השתמשנו במשפט 1.3.
את דוגמא א' אפשר לפתור גם ע"י שימוש במשפט 1.7. נראה דוגמה דומה.

דוגמה ג'

במקבילית ABCD, הקצו על 2 הצלעות הנגדיות שלה

קטעים שווים $CE = AF$

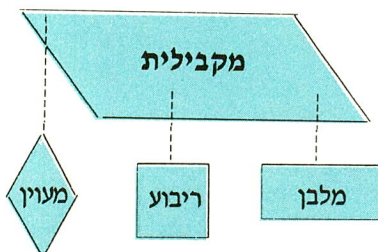
הוכח: $\angle FBE = \angle FDE$



נתון	מרובע ABCD $AD \parallel BC, AB \parallel DC$ $AF = CE$
צ"ל	$\angle FBE = \angle FDE$
הוכחה	$AD = BC$ (צלעות נגדיות) $AF = CE$ (נתון) $DF = BE$ (חיסור שווים) $DF \parallel BE$ (כי $AD \parallel BC$) $FBED$ מקבילית לפי 1.7 $\angle FBE = \angle FDE$ (זוויות נגדיות)

מ.ש.ל.

בהמשך נכיר **מקרים מיוחדים של מקבילית**, אלה המלבן, המעוין והריבוע
מקביליות שהגורמים שלהן (צלעות, זוויות) הם בעלי אופי מיוחד.



2. המלבן

הגדרה: המלבן הוא מקבילית, בעלת זווית ישרה.
תכונות המלבן:

2.1 משפט



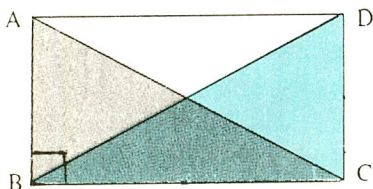
במלבן כל הזוויות ישרות.

הדבר נובע מתכונות הזוויות הנגדיות והסמוכות במקבילית. הוכח!

2.2 משפט:



במלבן האלכסונים שווים זה לזה.



נתון	מלבן ABCD
צ"ל	$AC = BD$
הוכחה	ב- $\triangle DCB$ וב- $\triangle ABC$ $AB = DC$ (צלעות נגדיות במקבילית) $BC = BC$ $\angle B = \angle C = 90^\circ$ (לפי 2.1) $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ (I. מ. ח.) $\Leftarrow$ $AC = DB$ (ח. מ. ב. ח.) $\Leftarrow$

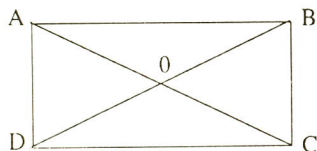
מ.ש.ל.

שים לב!



לתכונות אלה של המלבן, מצטרפות התכונות הנובעות מעצם היותו מקרה פרטי של המקבילית, ואלה הן:

- הצלעות הנגדיות שוות
- האלכסונים נחצים.



מכל תכונות המלבן נובע, שהקטעים DO, CO, BO, AO שווים זה לזה, כלומר, מתקבלים ארבעה משולשים שווים-שוקיים $\triangle AOB, \triangle AOD, \triangle COD$ ו- $\triangle BOC$

2.3 משפט (הפוך):



אם כל הזוויות במרובע ישרות, המרובע הוא מלבן. הוכח:

2.4 משפט (הפוך):



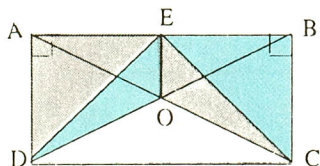
אם האלכסונים במקבילית שווים זה לזה, המקבילית היא מלבן. הוכח:

2.5 דוגמאות לבעיות ופתרון

דוגמה א'

E - אמצע הצלע AB של מלבן ABCD.

הוכח: א - $\triangle DEC$ שווה שוקיים, ב - $\angle DEO = \angle CEO$



נתון	מלבן ABCD
צ"ל	א - $\triangle DEC$ שווה שוקיים, ב - $\angle DEO = \angle CEO$
הוכחה	במשולשים ADE ו-BCE $AE = EB$ (נתון) $AD = BC$ (צלעות נגדיות) $\angle A = \angle B$ (זוויות ישרות) $\triangle ADE \cong \triangle BCE$ (מ.ח. I) $DE = CE \Leftarrow$

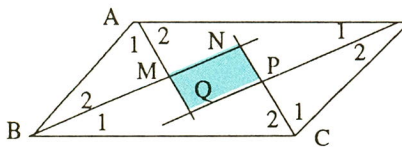
מ.ש.ל. א'

במשולשים DEO ו-CEO
$DE = CE$ (לפי א')
$EO = EO$
$DO = CO$ (חצאי אלכסונים במלבן)
$\triangle DEO \cong \triangle CEO$ (מ.ח. III)
$\angle DEO = \angle CEO \Leftarrow$

מ.ש.ל. ב'

הוכח: חוצי הזוויות במקבילית יוצרים מלבן.

הדרך המקובלת להוכחה, שמרובע מסוים הוא מלבן, היא להראות קודם שמרובע הוא מקבילית, ואח"כ להוכיח שיש בה זווית ישרה, או שאלכסוניה שווים. בעיה זו נוכיח בדרך שונה.



נתון	מרובע ABCD $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$ $\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$ $\angle D_1 = \angle D_2$, $\angle C_1 = \angle C_2$
צ"ל	מלבן MNPQ
הוכחה	$\angle A_2 = \frac{\angle A}{2}$
	$\angle D_1 = \frac{\angle D}{2}$
	$(\angle A + \angle D = 180^\circ \text{ כי }) \angle A_2 + \angle D_1 = \frac{\angle A + \angle D}{2} = 90^\circ$
	$\angle A Q D = 90^\circ$: $\Delta A Q D$ - ב- $\Leftarrow$
	באותה צורה מוכיחים שהזוויות P, M, N הן בנות 90°
	$\Leftarrow$ MNPQ מלבן (מרובע שבו כל הזוויות ישרות הוא מלבן).

מ.ש.ל.

3. המעוין

מעוין הוא מקבילית, שבה שתי צלעות סמוכות שוות זו לזו.

תכונות המעוין:

מהגדרת המעוין מתקבלת המסקנה:

3.1 משפט:



במעוין כל הצלעות שוות זו לזו. נמק!

3.2 משפט:

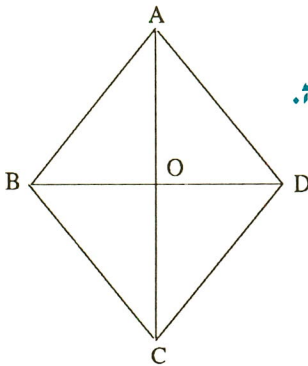


במעוין האלכסונים חוצים את הזוויות.

3.3 משפט:



במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.



את שני המשפטים האחרונים, אפשר להוכיח, ע"ס משפט הדלתון, או בעזרת משולש.

שים לב!



לתכונות אלה של המעוין, מצטרפות התכונות הנובעות מעצם היותו מקבילית:

- הזוויות הנגדיות שוות זו לזו.
- האלכסונים חוצים זה את זה.
- הצלעות הנגדיות מקבילות.

משפטים הפוכים - משפטים לזיהוי מעוין.

3.4 משפט:

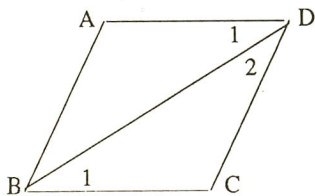


אם כל הצלעות במרובע שוות זו לזו, הרי הוא מעוין.
ההוכחה ע"ס משפט הפוך על צלעות במקבילית. (סעיף 1.5)

3.5 משפט:



אם אחד מאלכסוני המקבילית חוצה זווית אחת, המקבילית היא מעוין.



בהוכחה זו, אנו נתקלים שוב בשלשה:
חוצה-זווית, מקבילים, משולש שווה-שוקיים
(פרק ד', סעיף 2.7 ב').

במקרה זה נתונים שני המרכיבים הראשונים:

- חוצה זווית $\angle D_1 = \angle D_2 \Leftarrow$

- מקבילים $\angle D_1 = \angle B_1 \Leftarrow$ (מתחלפות)

והמסקנה היא שקיים גם הגורם השלישי:

- משולש שווה-שוקיים BCD, כלומר $BC = CD$

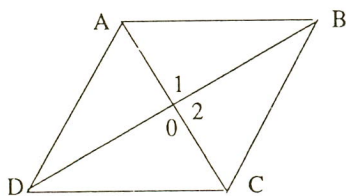
$\Leftarrow ABCD$ מעוין (לפי ההגדרה)

מ.ש.ל.

3.6 משפט



אם אלכסוני המקבילית מאונכים זה לזה, המקבילית היא מעוין.



נתון	מربع ABCD, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $AC \perp BD$
צ"ל	ABCD מעוין

הוכחה

במשולש ABC:

$AO = CO$ (האלכסונים במקבילית נחצים)

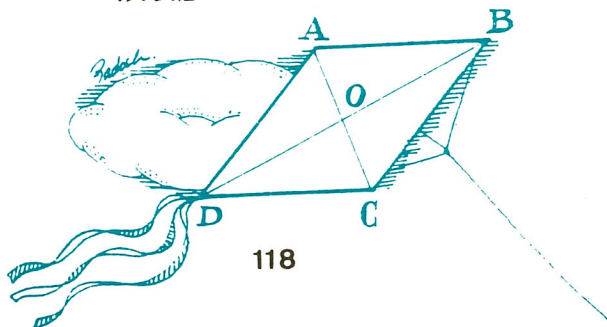
$\angle O_1 = \angle O_2 = 90^\circ$ (נתון)

$\triangle ABC \Leftarrow$ הוא שווה-שוקיים כי הקטע BO הוא גובה וגם תיכון, כלומר

$BA = BC$

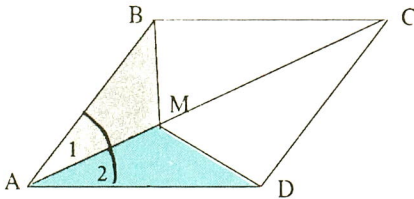
$\Leftarrow ABCD$ מעוין (מקבילית שבה שתי צלעות סמוכות שוות).

מ.ש.ל.



דוגמאות לבעיות ופתרונן

דוגמה א'



במעוין ABCD, M נקודה על האלכסון AC,
הוכח: $\angle ADM = \angle ABM$.

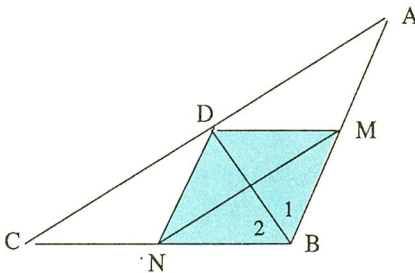
נתון	מרובע ABCD, M על AC
צ"ל	$\angle ADM = \angle ABM$

הוכחה
נבדוק $\triangle ABM$ ו- $\triangle ADM$
 $AB = AD$ (צלעות המעוין שוות)
 $AM = AM$
 $\angle A_1 = \angle A_2$ (האלכסון במעוין חוצה זווית)
 $\triangle ABM \cong \triangle ADM$ (מ.ח. I)
 $\angle ABM = \angle ADM \Leftarrow$

מ.ש.ל.

דוגמה ב'

במשולש ABC, BD חוצה את הזווית B. נתון: $DM \parallel BC$, $DN \parallel AB$.
הוכח כי הקטע המחבר את M ו- N מאונך לחוצה הזווית B.



נתון	$\triangle ABC$, $\angle B_1 = \angle B_2$ $DM \parallel BC$ $DN \parallel AB$
------	---

צ"ל	$MN \perp BD$
-----	---------------

הוכחה
 $MD \parallel BN$ (נתון)
 $DN \parallel BM$ (נתון)
 $\Leftarrow$ מקבילית DMBN
 $\angle B_1 = \angle B_2$ (נתון)
 $\Leftarrow$ DMBN (מעוין לפי 3.5)
 $\Leftarrow$ $MN \perp BD$ (במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה).
 מ.ש.ל.

4 הריבוע

הריבוע הוא מקבילית בעלת שתי צלעות סמוכות שוות וזווית ישרה.

תכונות הריבוע הן למעשה, סיכום של תכונות המעוין והמלבן גם יחד.

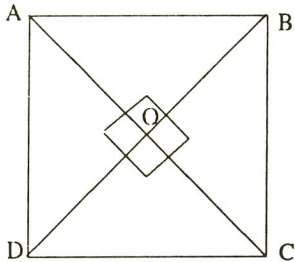
נמנה את כל המאפיינים של ריבוע, כולל אלה המוזכרים בהגדרתו:

כל הצלעות בו שוות.

כל הזוויות ישרות.

האלכסונים:

- שווים זה לזה,
- חוצים זה את זה,
- מאונכים זה לזה,
- חוצים את זוויות הריבוע.



הריבוע מתחלק ע"י אלכסוניו, לארבעה

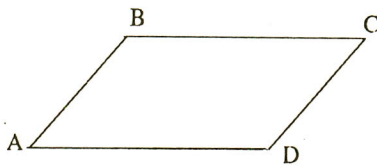
משולשים ישרי זווית ושווי-שוקיים, חופפים:

$\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$, ו- $\triangle AOD$.

תרגילים

השתמש בתכונות המקבילית (סעיפים 1.1- 1.3) כדי לפתור את התרגילים הבאים.

סעיף 1.1

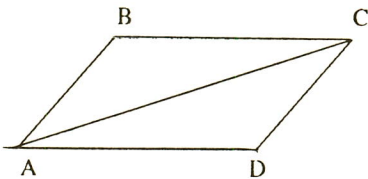


1. נתונה מקבילית ABCD ובה $\angle D = 40^\circ$
המשפט טוען $\angle A + \angle D = 180^\circ$

א. לכן $\angle A =$

ב. באותו אופן $\angle B =$

ג. חשב $\angle C =$



נתונה מקבילית ABCD

נתון $\angle BCD = 67^\circ$

$\angle BAC = 42^\circ$

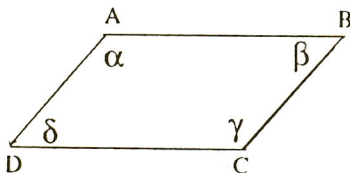
חשב את $\angle B$

ואת $\angle CAD$

נתונה מקבילית ABCD.

התייחס לנתונים המופיעים בכל סעיף

וקבע באילו מן הסעיפים נפלה טעות.



א. $\alpha = 140^\circ$, $\gamma = 140^\circ$

ב. $\beta = 50^\circ$, $\gamma = 135^\circ$

ג. $\gamma = 58^\circ$, $\delta = 122^\circ$

ד. $\alpha = 35^\circ$, $\gamma = 50^\circ$

4. במקבילית ABCD נתון קשר בין 2 מזוויותיה. חשב בכל סעיף את כל

זוויות המקבילית

א. $\angle B = \angle A + 20^\circ$

פתרון:

סמן $\angle A = X$

אז $\angle B = X + 20^\circ$

ולפי המשפט $X + X + 20^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow X = 80^\circ$

בעזרת הערך של X , קבל את ערכי יתר הזוויות.

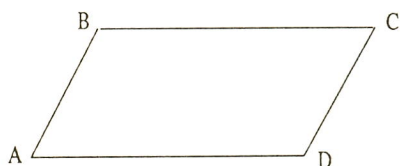
ב. $\angle D = \angle C + 30^\circ$

ג. $\angle C = \angle B - 60^\circ$

ד. $\angle D = 2 \angle A$

ה. $\angle D - \angle A = 10^\circ$

ו. $\angle B + \angle D = 260^\circ$



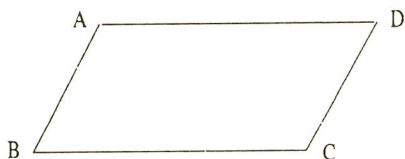
5. נתון קשר בין זוויות המקבילית. חשב את זוויות המקבילית.

א. $\angle A + \angle B + \angle C = 310^\circ$

ב. $\angle B - \angle A = \angle C$

ג. $\angle A = \angle B - \angle D$

היתכן מקבילית כזו? נמק!

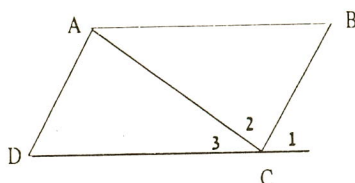


6. במקבילית ABCD

נתון $\angle C_1 = \angle C_3$

$\angle DAC = 50^\circ$

חשב את זוויות המקבילית

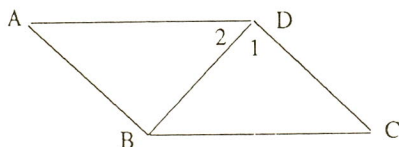


7. האלכסון BD של המקבילית שווה לצלע AB,

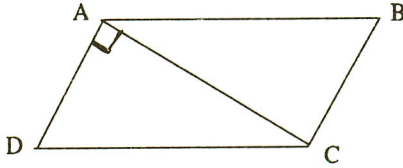
והוא מחלק את הזווית D ביחס של 1 : 3

($\angle D_1$ גדולה מ- $\angle D_2$)

חשב את זוויות המקבילית.



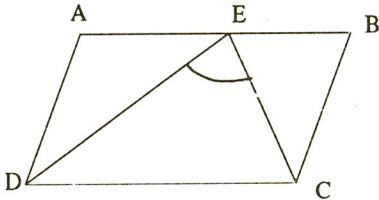
8. במקבילית ABCD, גדולה הצלע AB
 פי 2 מהצלע BC.
 האלכסון AC מאונך לצלע AD.



חשב את זוויות המקבילית.

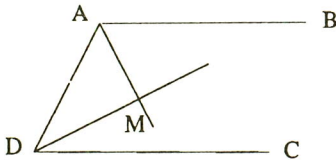


- 9* במקבילית ABCD, DE
 חוצה את הזווית D ונתון:
 $\angle DEC = 80^\circ$, $DE = DC$

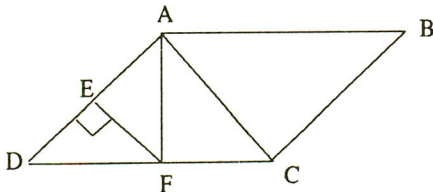


א - חשב את זוויות המקבילית
 ב - הוכח כי EC חוצה את הזווית BED

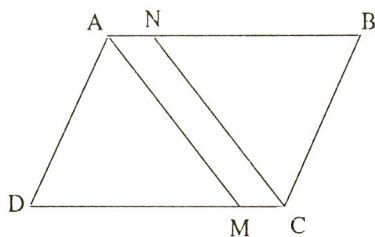
10. הוכח כי חוצי הזווית A ו-D
 במקבילית ABCD, מאונכים
 זה לזה,
 כלומר ש: $\angle AMD = 90^\circ$



11. במקבילית ABCD, EF
 הוא אנך אמצעי לצלע AD.
 הקטע AF והאלכסון AC מחלקים
 את הזווית A של המקבילית,
 ל-3 זוויות שוות.



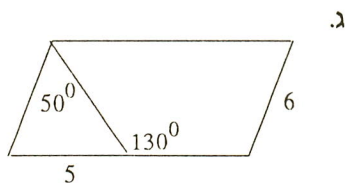
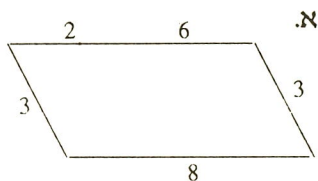
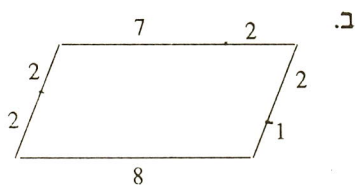
א - חשב את זוויות המקבילית.
 ב - הוכח כי AF הוא אנך אמצעי
 לצלע DC.



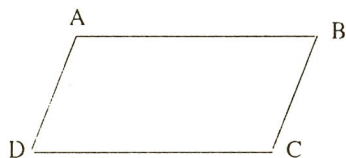
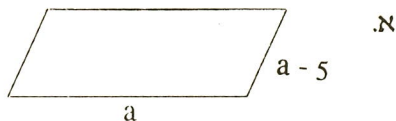
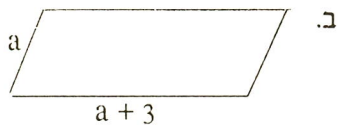
12. ABCD מקבילית.
 AM - חוצה-זווית A
 CN - חוצה-זווית C
 הוכח $\angle AMC = \angle ANC$

סעיף 1.2

13. קבע באילו מהמקביליות שבשרטוט, הנתונים מוטעים. נמק!

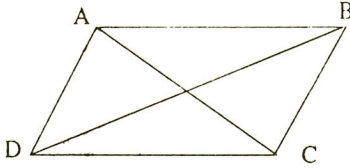


14. מצא את אורך הצלע a במקביליות הבאות, אם היקף כל אחת מהן 26 ס"מ

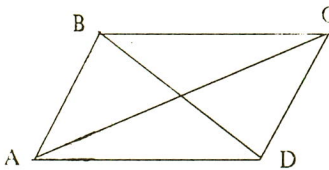


15. במקבילית ABCD נתון היחס הבא:
 $AD : AB = 2 : 3$
 מהו היחס בין:
 א - AD ל- DC
 ב - DC ל- BC
 ג - AD ל- BC

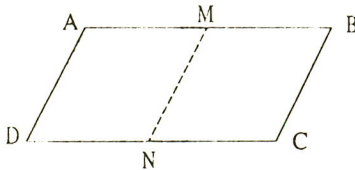
16. במקבילית ABCD, שהיקפה 30 ס"מ נתון היחס הבא:
 $AD : AB = 1 : 2$, חשב את צלעות המקבילית.



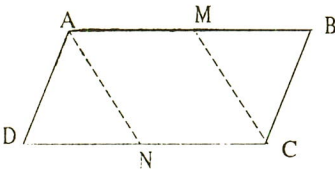
17. היקף המשולש BCD במקבילית ABCD גדול מהיקף המשולש ACD ב- 7 ס"מ.
 חשב בכמה גדול האלכסון BD מהאלכסון AC.



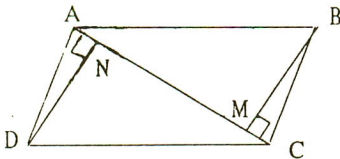
18. במקבילית ABCD שווה האלכסון הגדול AC ל- 10 ס"מ.
 היקף המשולש BAC גדול מהיקף המשולש BAD ב- 3 ס"מ.
 חשב את אורך BD.



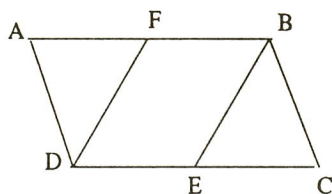
19. במקבילית ABCD נתון:
 $MN \parallel AD$, $AM = MB$
 א- הוכח כי AMND מקבילית.
 ב- הוכח: $ND = NC$



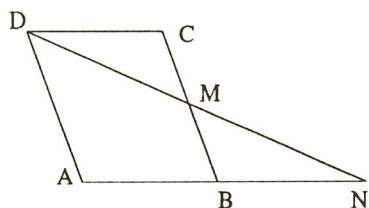
20. במקבילית ABCD נתון:
 M - אמצע הצלע AB,
 N - אמצע הצלע DC,
 הוכח כי $AN = MC$



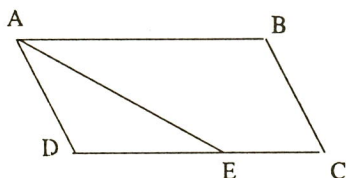
21. במקבילית ABCD, DN ו- BM הם אנכים לאלכסון AC
 (אלה רוחקי הקודקודים B ו- D מהאלכסון AC).
 הוכח: $DN = BM$



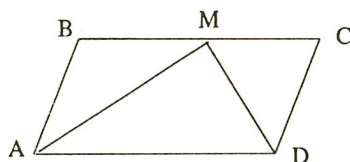
22. במקבילית ABCD, BE הוא חוצה הזווית B, ו-DF הוא חוצה הזווית D. הוכח: $BE = DF$.



23. במקבילית ABCD, חיברו את הקודקוד D עם האמצע M של הצלע BC. נקודת המפגש של DM ו-AB. הוכח: $AB = BN$.

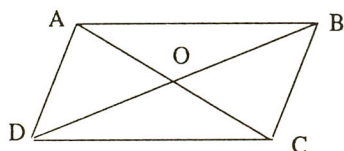


24. במקבילית ABCD, חוצה AE את הזווית A. הוכח: א - משולש שווה שוקיים. B - חשב את אורך הקטע EC, אם נתון: $AB = 10$ ס"מ, $BC = 7$ ס"מ.

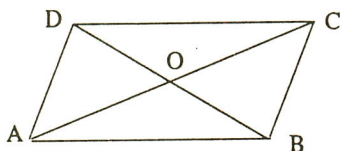


25. במקבילית ABCD, גדולה הצלע BC פי 2 מ-AB. AM הוא חוצה הזווית A. הוכח: $MC = CD$.

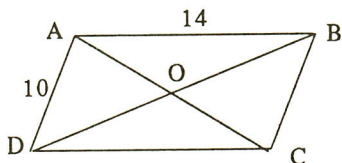
סעיף 1.3



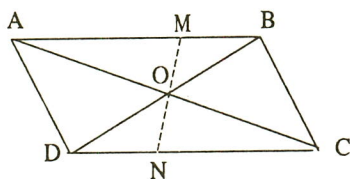
26. במקבילית ABCD, נתונים אורכי הצלעות: 12 ס"מ ו-16 ס"מ. אורכי האלכסונים: 14 ס"מ ו-22 ס"מ. חשב את היקפי המשולשים AOB ו-AOD.



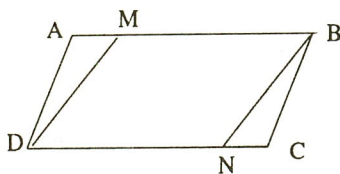
27. במקבילית ABCD נתון:
 $OC = 7$ ס"מ, $BD = 10$ ס"מ,
 $DC = 8$ ס"מ.
 חשב את היקף המשולש AOB.



28. במקבילית ABCD, אורכי הצלעות הם 10 ס"מ ו-14 ס"מ.
 חשב בכמה גדול היקף המשולש AOB מהיקף המשולש BOC.



29. ABCD מקבילית. דרך O העבירו קטע MN.
 הוכח:
 א - $\triangle MOB \cong \triangle DON$
 ב - $AM = NC$ (בלי להעזר בסעיף א)
 ג - $MO = ON$



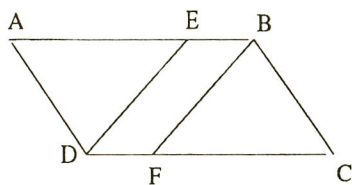
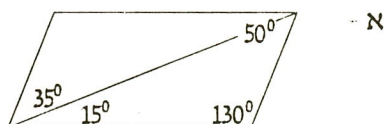
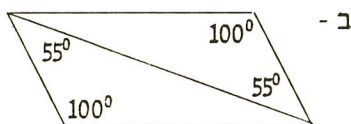
- * 30. ABCD מקבילית וכן $DM \parallel BN$
 הוכח: הקטעים AC ו-MN נפגשים על האלכסון BD.



השתמש במשפטים לזיהוי מקביליות (סעיפים 1.7 - 1.4) כדי לפתור את התרגילים הבאים.

סעיף 1.4

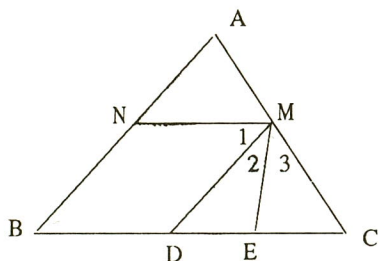
31. האם המרובעים שבשרטוט הם מקביליות? נמק!



32. במקבילית ABCD, DE
הוא חוצה הזווית D ו-BF
חוצה הזווית B,
 $\angle A = 40^\circ$

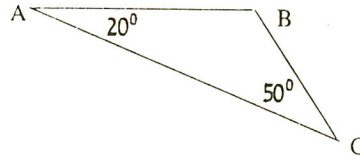
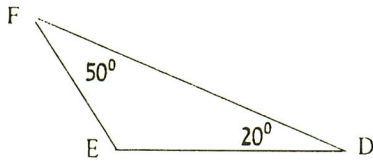
א - חשב את זוויות המרובע EBFM.
ב - איזה סוג של מרובע הוא EBFM. נמק!

33. הוכח באופן כללי את המסקנה שקיבלת בבעיה הקודמת (סעיף ב'):
החוצים של 2 זוויות נגדיות במקבילית, יוצרים מקבילית נוספת.

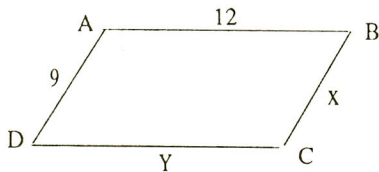


34. במשולש ABC, $\angle A = 70^\circ$.
הקטעים MD, MN ו-ME
יצרו 3 זוויות שוות 1, 2 ו-3
שגודל כל אחת מהן 35° .
 $ME = ED$
הראה כי BNMD מקבילית.

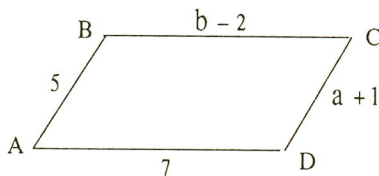
- 35 התיחס לנתונים שבשרטוט וכן לנתון: $AC = DF$. האם תוכל ליצור מקבילית משני משולשים אלה. נמק!



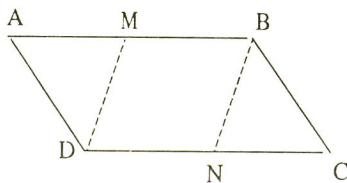
סעיף 1.5



- 36 במרובע ABCD נתון: $AB = 12$ ס"מ ו- $AD = 9$ ס"מ. מה צריך להיות אורכו של X ואורכו של Y, כדי שמרובע זה יהיה מקבילית.



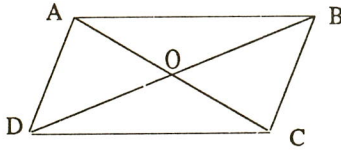
- 37 חשב את גודלם של a ושל b, כדי שהמרובע ABCD יהיה מקבילית.



- 38 במקבילית ABCD הקצו שני קטעים שווים $AM = CN$. הוכח, כי MBND מקבילית.

- 39 אורכי צלעות המרובע ABCD הם (בס"מ): $BC = a + 10$, $AB = 5$, $AD = 3a$, $CD = a - 1$. האם תוכל למצוא ערך של a, כך שהמרובע הנ"ל יהיה מקבילית.

סעיף 1.6



40. אלכסוני המרובע ABCD נפגשים
בנקודה O. קבע בכל אחד מהסעיפים
הבאים, אם המרובע הוא מקבילית.
(האורכים נתונים בס"מ).

א - $AO = 3$, $BO = 5$

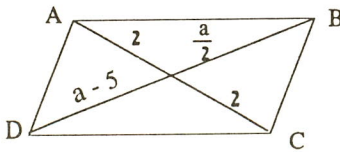
$BD = 10$, $CO = 3$

ב - $CO = 6$, $BO = 8$

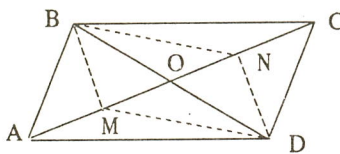
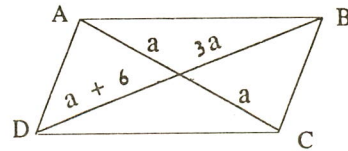
$CO : DO = 3 : 4$, $AO = 6$

41. לאיזה ערך של a יהיה המרובע שבשרטוט מקבילית.

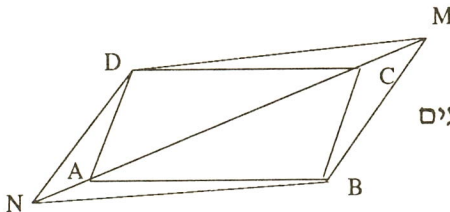
ב.



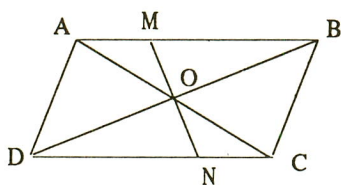
א.



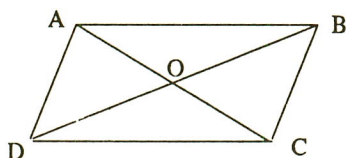
42. במקבילית ABCD, מחלקות הנקודות
M, O, N את האלכסון AC ל-4
קטעים שווים. הוכח כי המרובע
BMDN הוא מקבילית.



43. על המשכי האלכסון AC, של
מקבילית ABCD, הקצו שני קטעים
שווים $AN = CM$.
הוכח כי DNBM מקבילית.

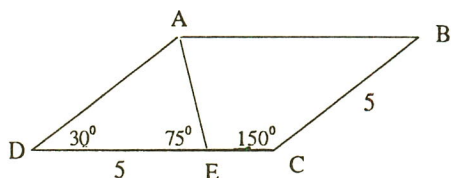


44. הקטע MN עובר דרך נקודת הפגישה O של האלכסוני המקבילית ABCD.
 א - הוכח כי $MO = ON$
 * ב - ציין שתי מקבילות, אשר MN הוא האלכסון בכל אחת מהן. נמק!

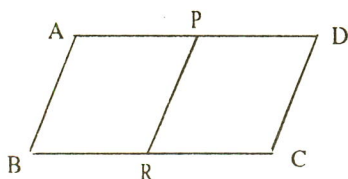


- 45 * במרובע ABCD נתון:
 $DO = OB$, $AD \parallel BC$
 הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

סעיף 1.7

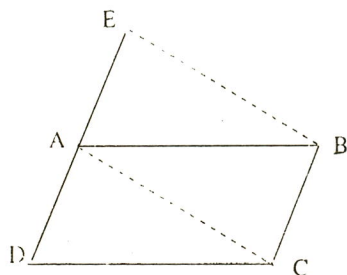


46. התיחס לנתונים שבשרטוט והראה כי המרובע ABCD הוא מקבילית.

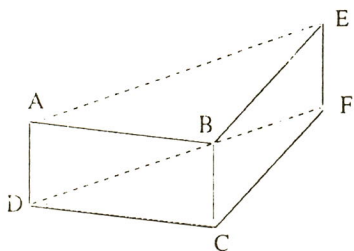


47. נתונה מקבילית ABCD.
 P - אמצע צלע AD, R - אמצע BC.
 הוכח כי APRB ו-PDCR הן מקבילות.

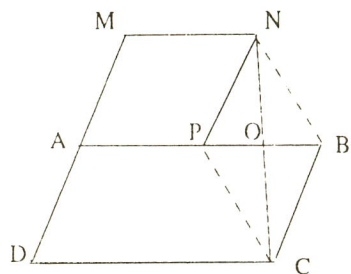
48. האם תוכל למצוא בבעיה הקודמת 2 מקבילות נוספות, שאפשר ליצור בעזרת הנקודות P ו-R. נמק!



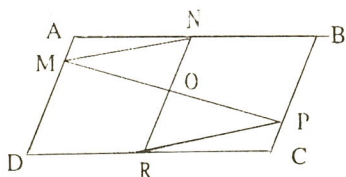
49. $ABCD$ מקבילית. את הצלע AD המשיכו כאורכה. הוכח כי המרובע $AEBC$ הוא מקבילית.



50. למקביליות $ABCD$ ו- $BEFC$ שבשרטוט צלע משותפת BC . הוכח, שהמרובע $AEFD$ הוא מקבילית.

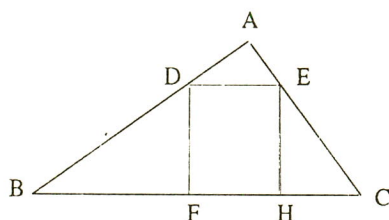


- 51* את הצלע AD של המקבילית $ABCD$ האריכו כאורכה: $MA = AD$ ויצרו מקבילית נוספת $MNPA$. הוכח כי $NO = CO$.

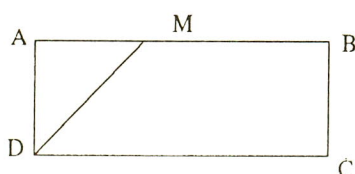


- 52* $ABCD$ מקבילית נתון: $AM = CP$
 $AN = CR$
 הוכח: $MO = OP$

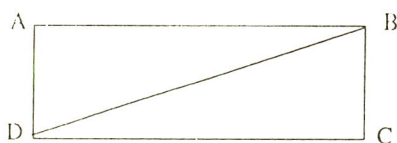
המלבן - העזר בהגדרת המלבן ופתור את התרגילים 53-59.



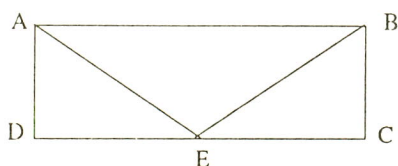
53. במשולש ABC נתון $DE \parallel BC$.
 מקצות הקטע DE הורידו אנכים
 לבסיס BC. איזה צורה למרובע
 DEHF. נמק!



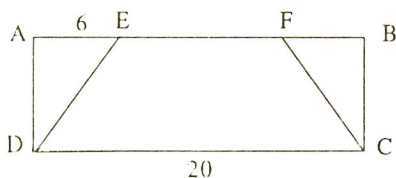
54. במלבן ABCD נתון
 $\angle MDC = 45^\circ$, $AM = 3$ ס"מ
 חשב את BC



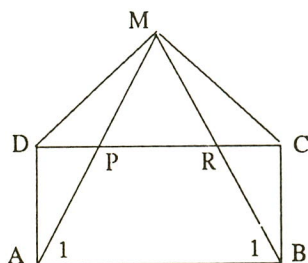
55. במלבן ABCD יוצר
 האלכסון BD זווית בת 60°
 עם BC, $BD = 8$ ס"מ
 חשב את AD.



56. במלבן ABCD חיברו
 את האמצע E של הצלע DC
 עם A ו-B.
 הוכח $AE = BE$.



57. במלבן ABCD נתון
 $\angle EDC = \angle FCD$
 $DC = 20$ ס"מ, $AE = 6$ ס"מ
 חשב את EF.



58. במלבן ABCD נבנו שתי זוויות שוות

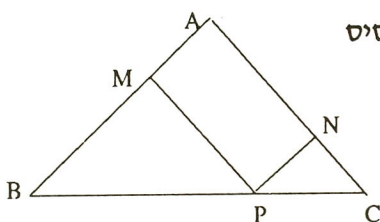
$$\angle A_1 = \angle B_1$$

שוקיהן נפגשות בנקודה M.

הוכח:

א. $DM = CM$

ב. $DP = CR$



59. משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים ABC (A - זווית הראש). מנקודה P שעל הבסיס

בנו אנכים PM ו-PN לשוקיים.

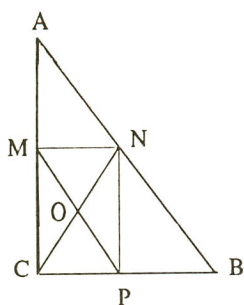
א. קבע איזה סוג מרובע הוא ANPM.

נמק!

ב. הוכח כי $\triangle BMP$ הוא שווה שוקיים.

ג. הוכח $AB = MP + PN$ *

סעיף 2.2



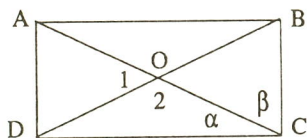
60. N נקודה על היתר AB של משולש

ישר זווית ABC.

מנקודה N הורידו אנכים NM ו-NP

לניצבים AC ו-BC (בהתאמה).

הוכח: $NC = 2MO$



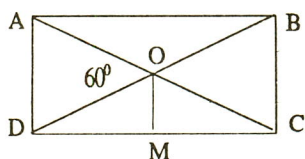
61. במלבן ABCD יוצר האלכסון AC

זווית α עם הצלע DC

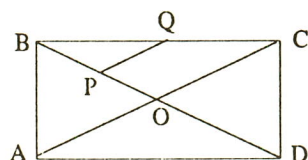
א. הוכח כי $\angle O_1 = 2\alpha$

ב. חשב את $\angle O_1$ כאשר $\alpha = 42^\circ$

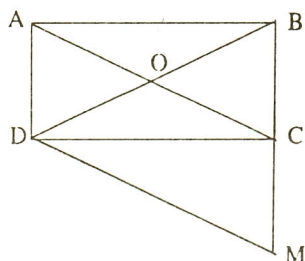
ג. מה גודלה של β , אם $\angle O_2 = 130^\circ$



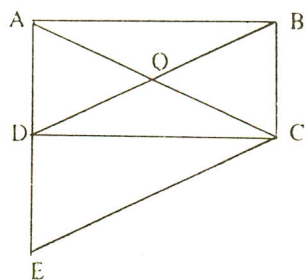
62. הזווית בין אלכסוני המלבן ABCD
 בת 60° : הקטע OM מאונך
 ל-DC.
 הוכח: $AC = 4 OM$



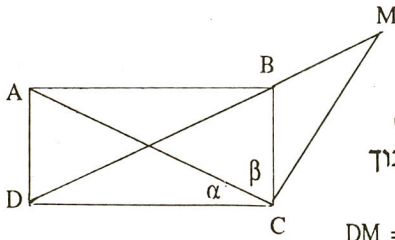
63. במלבן ABCD נתון:
 $PQ \parallel AC$
 הוכח: א. משולש שווה שוקיים BPQ
 ב. $AO - OP = PQ$ *



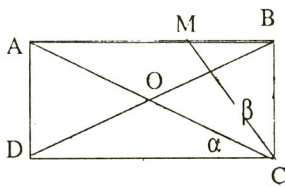
64. במלבן ABCD המשיכו את הצלע
 BC כאורכה: $BC = CM$
 וחייברו את M ל-D.
 א. הוכח כי ACMD מקבילית.
 ב. הוכח כי $BD = MD$



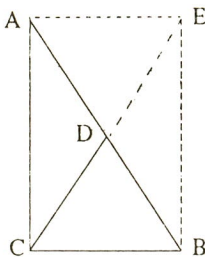
65. במלבן ABCD שווה הזווית
 בין הצלע AB לאלכסון
 AC ל- 30° ונתון $CE \parallel BD$
 הוכח:
 א. $\triangle AOD$ שווה צלעות.
 ב. $CE = 2 BC$



- 66* במלבן ABCD מחלק האלכסון את הזווית C ביחס של $\alpha : \beta = 1 : 2$ נתון $\angle BCM = \alpha$ (M נקודת החיתוך עם המשך האלכסון DB) א. חשב את α ב. הוכח כי $DM = 3BC$

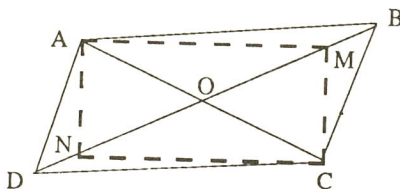


- 67* האלכסון AC במלבן ABCD מחלק את הזווית C ביחס של $\alpha : \beta = 1 : 2$ נתון $\angle MCB = \alpha$ העזר בחישוב של α בבעיה הקודמת והוכח: א. $AM = 2MB$ ב. משולש שוו"ש



- 68* נתון משולש ישר זווית ABC $\angle C = 90^\circ$. CD הוא התיכון ליתר AB. הוכח $AB = 2CD$ (התיכון ליתר שווה למחצית היתר). רמז. מאריכים את התיכון $CD = DE$ כאורכו

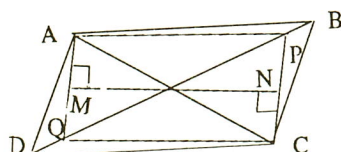
סעיף 2.4



- 69 במקבילית ABCD נתון $AC = 14$ ס"מ, $BD = 2$ ס"מ $BM = DN$ הוכח כי המרובע AMCN הוא מלבן.

70. הוכח:

אם התיכון לצלע שווה למחצית אותה הצלע, אזי המשולש הוא ישר זווי
והצלע הנ"ל היא היתר.
רמז – הארך את התיכון כאורכו ובדוק איזה סוג מרובע מתקבל.

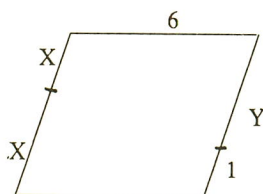


* 71. ABCD מקבילית. MN חוצה את הזווית שבין אלכסוניה מהנקודות C ו-A הורידו אנכים לחוצה הזווית. הוכח כי המרובע APCQ הוא מלבן.

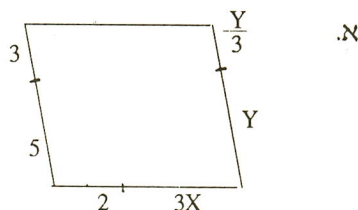
המעוין

סעיף 3.1

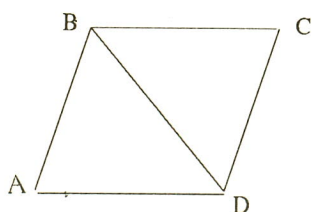
72. בשרטוט נתון מעוין, חשב את X ואת Y



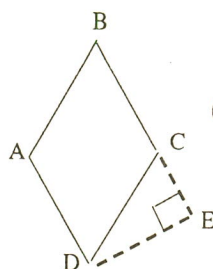
ב.



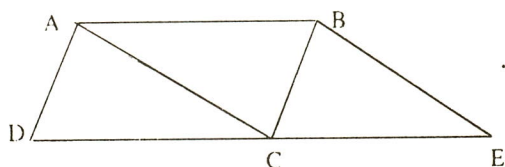
א.



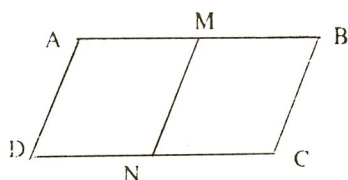
73. במעוין ABCD שווה האלכסון BD ל-AB. חשב את הזווית $\angle DAB$



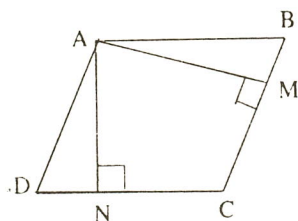
74. ABCD מעוין DE מאונך ל-BC (בהמשכה) $\angle B = 60^\circ$, $AD = 8$ ס"מ
א - חשב את CE
ב - הוכח: $BE = 3CE$



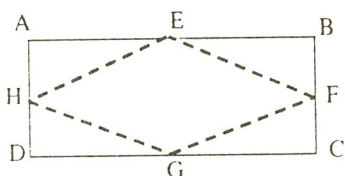
75. במקבילית ABCD נתון $7 \text{ ס"מ} = AC = DC = CE$.
 א - חשב את BE
 ב - הוכח כי ABEC מעוין.



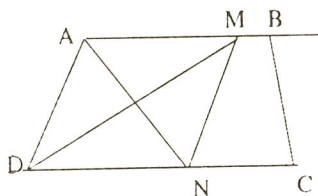
76. במקבילית ABCD נתון $AB = 2AD$
 דרך נקודת האמצע M של הצלע AB בנו מקביל MN ל-AD. הוכח MBCN ו-AMND הם מעוינים.



77. במעוין ABCD הורידו, מקודקוד A אנכים AM ו-AN לשתי הצלעות DC ו-AB. הוכח כי $AM = AN$.
 (AM ו-AN הם גבהי המעוין).



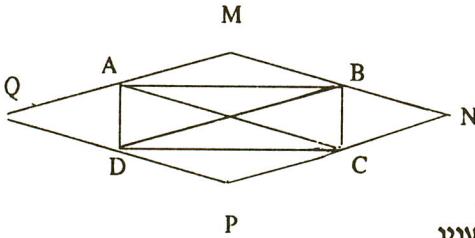
78. ABCD מלבן הוכח שאם נחבר את אמצעי צלעותיו E, F, G, H נקבל מעוין.



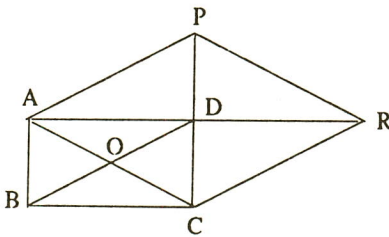
79. במרובע ABCD נתון:
 $AB \parallel CD$, AN חוצה זווית A ו-DM חוצה הזווית D.
 $AB = 10 \text{ ס"מ}$, $DC = 12 \text{ ס"מ}$, $AD = 7 \text{ ס"מ}$
 א. איזה מרובע הוא AMND? נמק!
 ב. חשב את האורך של MB ו-NC



80* . ABCD מלבן.

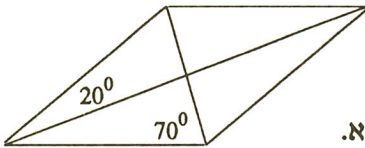


דרך קודקודי המלבן בונים מקבילים לאלכסונו.
(MQ ו-NP מקבילים ל-BD, MN ו-PQ מקבילים ל-AC).
הוכח כי המרובע MNPQ הוא מעוין.

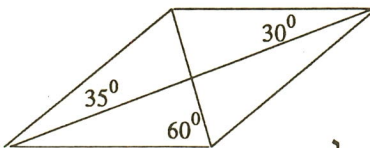


81. נתון מלבן ABCD. דרך הנקודות A ו-C העבירו מקבילים לאלכסון BD. מקבילים אלה חותכים את המשכי הצלעות AD ו-CD בנקודות P ו-R. הוכח כי APRC מעוין, וכן $\frac{PR}{2} = AO$.
רמז: הראה כי APDB ו-BDRC הן מקביליות.

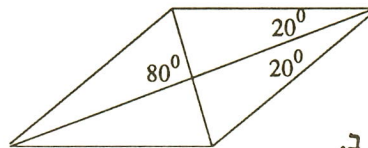
3.2 ו-3.3 סעיפים



א.

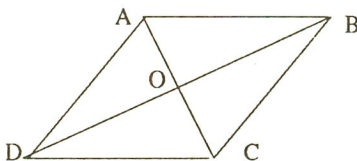


ג.

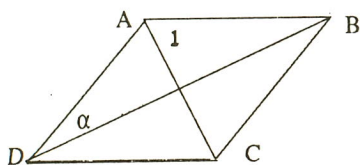


ב.

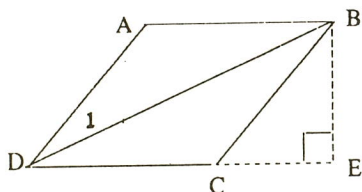
82. לפניך 3 מעוינים. באיזה מהם, הנתונים שגויים. נמק!



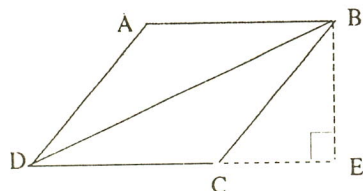
83. במעוין ABCD נתון $\angle DBC = 30^\circ$, $DC = 6$ ס"מ. חשב את אורך הקטע AO.



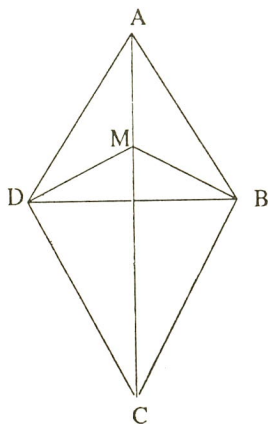
84. ABCD מעוין
 נתון: $\angle ADB = \alpha$
 א. מצא זוויות נוספות בשרטוט שגודלן α .
 ב. אם $\alpha = 40^\circ$, חשב את הזווית A_1 ומצא זוויות נוספות בעלות אותו גודל.



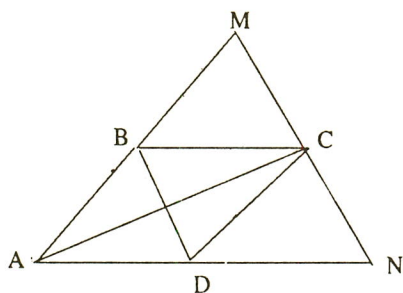
85. במעוין ABCD, BE מאונך לצלע DC (בהמשכה)
 $\angle D_1 = 22.5^\circ$, $BE = 5$ ס"מ
 חשב את CE



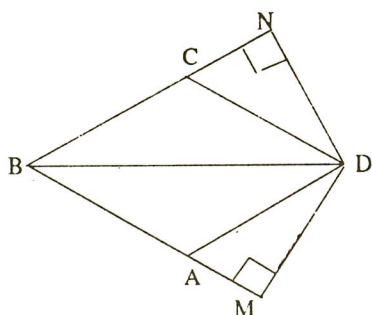
86. במעוין ABCD נתון:
 $\angle A = 120^\circ$, $BE \perp DE$
 $BD = 12$ ס"מ
 חשב את BE



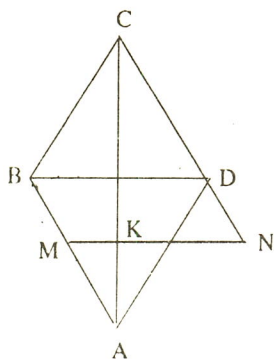
87. ABCD מעוין.
 M נקודה על האלכסון AC.
 הוכח:
 $\angle ADM = \angle ABM$



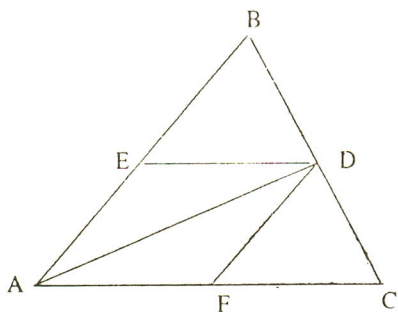
88. ABCD מעוין.
 דרך C בונים מקביל ל- BD,
 החותך את המשכי צלעות המעוין
 ב- M וב- N.
 הוכח: AC גובה
 במשולש AMN.



89. ABCD מעוין.
 DM ו- DN מאונכים לצלעות המעוין.
 הוכח: א. $DM = DN$
 ב. $\angle MDB = \angle BDN$

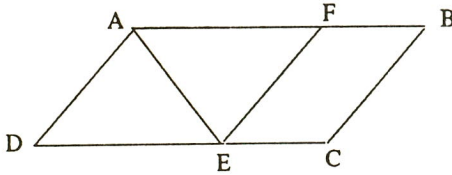


- * 90. ABCD מעוין.
 מנקודה M שעל AB מורידים אנך
 MK לאלכסון AC.
 MK ו- CD נפגשים ב- N.
 הוכח: א. $MN = BD$
 ב. $AD = AM + DN$

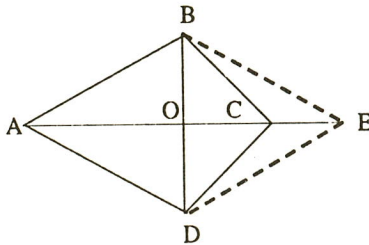


- * 91. במשולש ABC חסום מעוין AEDF
 נתון: $AD \perp BC$
 הוכח:
 א. ABC משולש שוו"ש
 ב. $EF \parallel BC$

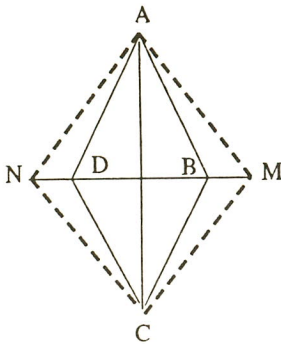
סעיפים 3.5 ו- 3.6



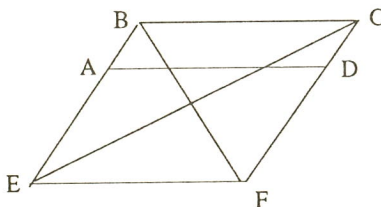
92. $ABCD$ מקבילית.
 AE חוצה את הזווית A ,
 $FE \parallel AD$
 הוכח: $AFED$ מעוין.



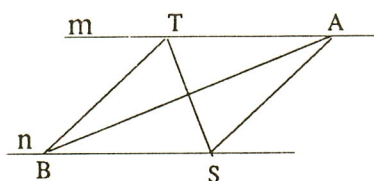
93. $ABCD$ דלתון.
 את האלכסון AC המשיכו כך
 ש- $AO = OE$
 הוכח: $ABED$ מעוין.



94. $ABCD$ מעוין
 נתון $BM = DN$
 הוכח: $AMCN$ מעוין.



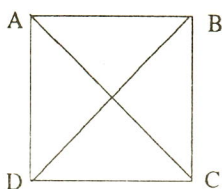
95. במקבילית $ABCD$ חותכים
 חוצי-הזוויות B ו- C ,
 את המשכי הצלעות CD
 ו- AB (בהתאמה),
 בנקודות F ו- E .
 הוכח: $BCFE$ מעוין.



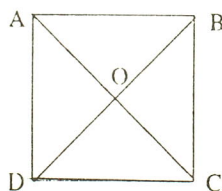
96. נתונים שני ישרים מקבילים m ו- n
 A נקודה על m
 B נקודה על n
 TS הוא האנך האמצעי של הקטע AB.
 הוכח TASB מעוין.

הריבוע סעיף 4

97. חשב את היקפו של ריבוע אשר אורך צלעו (בס"מ) הוא:
 א. 16 ס"מ, ב. a , ג. $0.5k$, ד. $(a-1)$

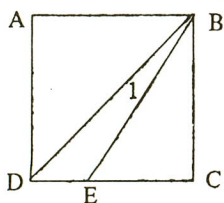


98. ריבוע ABCD היקף המשולש ABD הוא 12 ס"מ.
 חשב את היקף המשולש ABC.

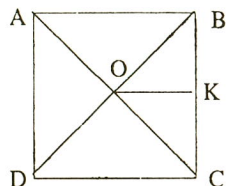


99. ריבוע ABCD.
 $AB = a$, $BD = b$.
 חשב את היקף המשולש
 א. ABC, ב. BOC, ג. BOA

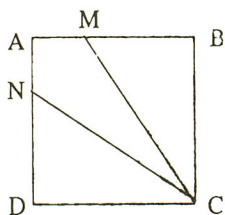
100. ריבוע ABCD (שרטוט כמו בבעיה הקודמת)
 היקף המשולש ABC גדול מהיקף המשולש ABO ב-9 ס"מ.
 חשב את אורך AD.



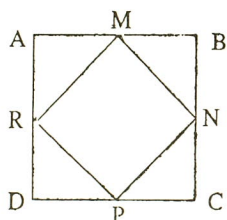
101. ABCD ריבוע,
 $\angle B_1 = 15^\circ$
 $BE = 8$ ס"מ
 חשב את אורך הקטע CE



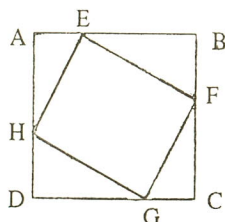
102. ABCD ריבוע,
 שאורך צלעו 14 ס"מ.
 OK תיכון ל-BC במשולש OBC
 חשב את אורכו של OK.



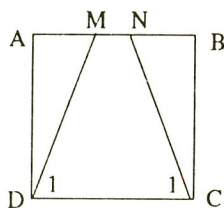
103. ABCD ריבוע ובו
 $AM = AN$
 הוכח: $MC = NC$



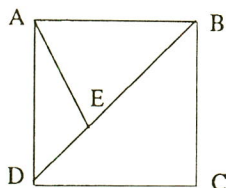
104. ABCD ריבוע
 P, N, M ו- R הן
 אמצעי צלעותיו.
 הוכח: MNPR ריבוע.



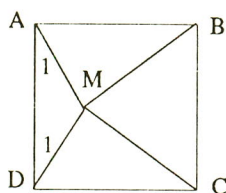
105. ABCD - ריבוע
 $AE = BF = CG = DH$ נתון
 הוכח: EFGH ריבוע



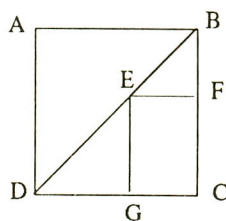
106. בריבוע ABCD בנו שתי
זוויות שוות $\angle D_1 = \angle C_1$
הוכח: $AM = BN$



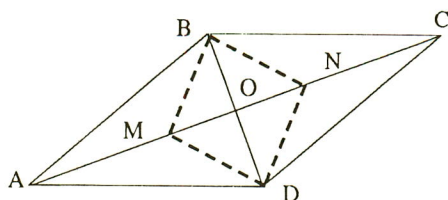
107. בריבוע ABCD, הקצו על
האלכסון BD, קטע BE
השווה ל-BC.
חשב את גודל הזווית DAE.



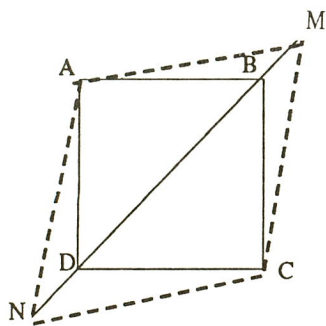
108. ABCD ריבוע.
 $\angle A_1 = \angle D_1$
הוכח כי $BM = CM$



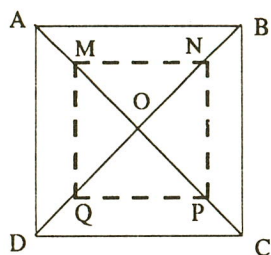
109. אורך צלע הריבוע ABCD
הוא 10 ס"מ.
מנקודה E על האלכסון BD
בנו מקבילים EF ו-EG
לצלעות הריבוע.
נתון $EF = 3$ ס"מ
חשב את EG.



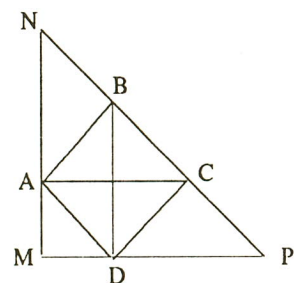
110. האלכסון AC של המעוין
ABCD גדול פי 2 מ-BD.
M - אמצע הקטע AO
N - אמצע CO,
הוכח: BNDM ריבוע.



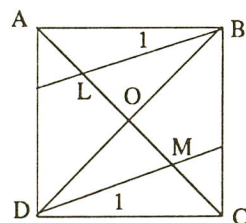
111. ABCD ריבוע.
את האלכסון BD המשיכו
כך ש: $BM = DN$
הוכח: AMCN מעוין.



112. בריבוע ABCD, נתון:
 $AM = BN = CP = DQ$
הוכח: MNPQ ריבוע.

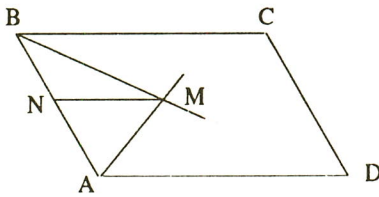


- * 113. ABCD ריבוע. דרך A ו-D
בנו מקבילים לאלכסונו:
 $MD \parallel AC$, $MA \parallel BD$
המקבילים הנ"ל חותכים את
המשכי BC ב-N וב-P.
הוכח: MNP משולש ישר זווית
ושווה שוקיים.

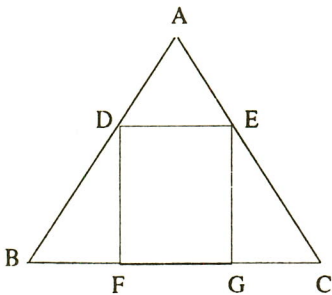


- * 114. ABCD ריבוע.
נתון: $\angle D1 = \angle B1 = 15^\circ$
הוכח: $BL = LM$

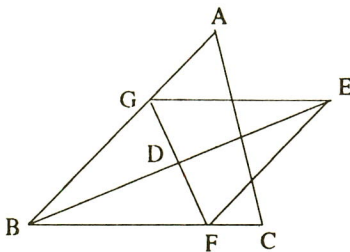
בעיות מעורבות



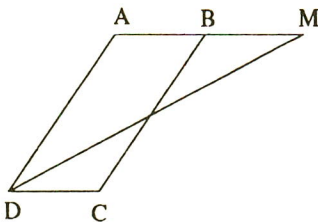
115. במקבילית ABCD, נפגשים חוצי הזוויות A ו-B בנקודה M. הוכח, כי התיכון של צלע AB - MN מקביל לצלע BC. רמז: היזכר בתכונת התיכון ליתר.



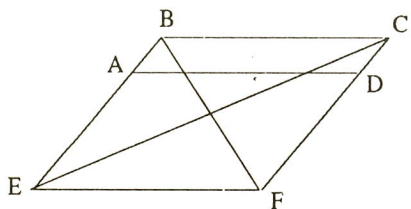
- 116*. משולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$), נתון: $BF = FG = GC$, $FD \perp BC$, $GE \perp BC$. הוכח: א. המרובע DEGF הוא מלבן ב. אלכסוני המרובע DEGF מקבילים לשוקי המשולש ABC



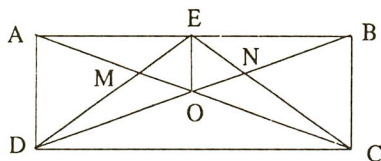
117. במשולש ABC, BD הוא חוצה-הזווית B. E נקודה על המשכו של BD ונתון $EG \parallel BC$ וכן $EF \parallel AB$. הוכח כי $GF \perp BE$



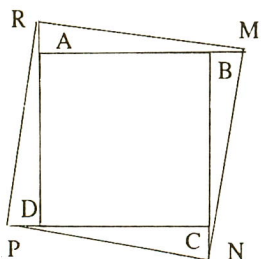
- 118*. במקבילית ABCD, חותך חוצה הזווית D את המשך הצלע AB בנקודה M. הוכח: $BM = AD - DC$



119. במקבילית ABCD חותכים חוצי-הזוויות B ו- C , את המשכי הצלעות CD ו- AB בנקודות F ו- E (בהתאמה). הוכח: $\angle CEF + \angle BFC = 90^\circ$

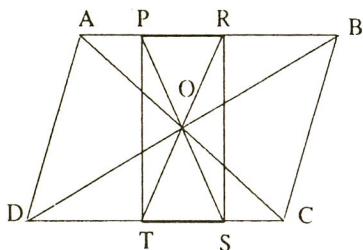


- 120 * . ABCD מלבן.
E אמצע הצלע AB .
הוכח: EMON דלתון.

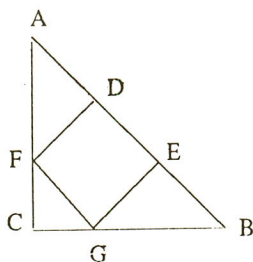


121. על המשכי צלעות הריבוע ABCD הקצו קטעים שווים $AR = BM = CN = DP$.
הוכח כי MNPR ריבוע.

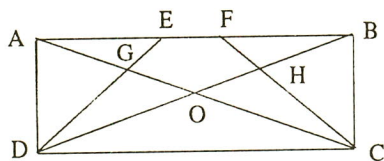
122. הוכח כי בסיסי האנכים היורדים מקודקודי המקבילית אל אלכסוניה, הם קודקודים למקבילית חדשה.



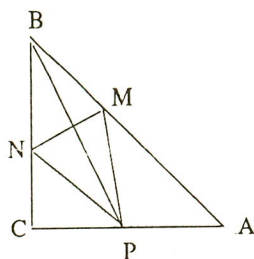
123. ABCD מקבילית. O נקודת מפגש האלכסונים. P ו- R נקודות, במקומות כלשהם על AB . המשכי PO ו- RO , חותכים את הצלע CD בנקודות S ו- T (בהתאמה). הוכח כי PRST מקבילית.



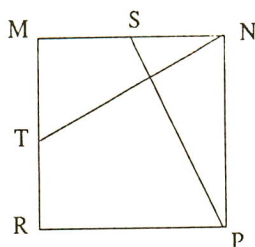
124. משולש ישר-זווית ABC ושווה-שוקיים ($\angle C = 90^\circ$)
 נתון: $AD = DE = EB$
 וכן: $GE \perp AB$, $FD \perp AB$
 הוכח כי $FDEG$ ריבוע.



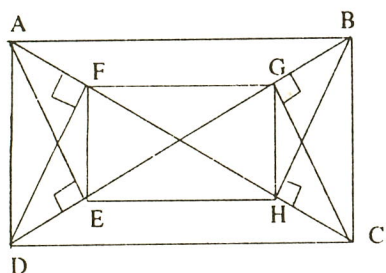
125. במלבן $ABCD$,
 נתון: $AE = BF$
 הוכח: א. $GO = OH$
 ב. $EG = FH$



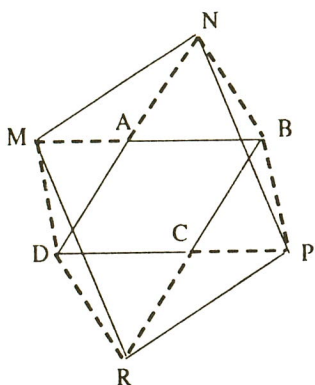
- * 126. במשולש ישר-זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$)
 שרטטו מעוין $BMPN$.
 הוכח ש- $\angle BPC = \angle BMN$



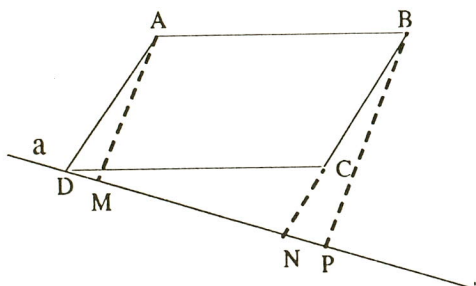
- ** 127. $MNPR$ ריבוע, וכן נתון:
 $MS = SN$, $MT = TR$
 הוכח: $NT \perp PS$



- * 128. נתון מלבן ABCD. מכל קודקודיו הורדו אנכים לאלכסונו והתקבלו נקודות E, F, G ו- H. הוכח כי המרובע EFGH הוא מלבן, שצלעותיו מקבילות לצלעות ABCD.



- ** 129. על צלעות מקבילית ABCD בונים משולשים שווי-צלעות. הוכח כי המרובע MNPR, המתקבל מחבור הקודקודים החופשיים של המשולשים, הוא מקבילית.

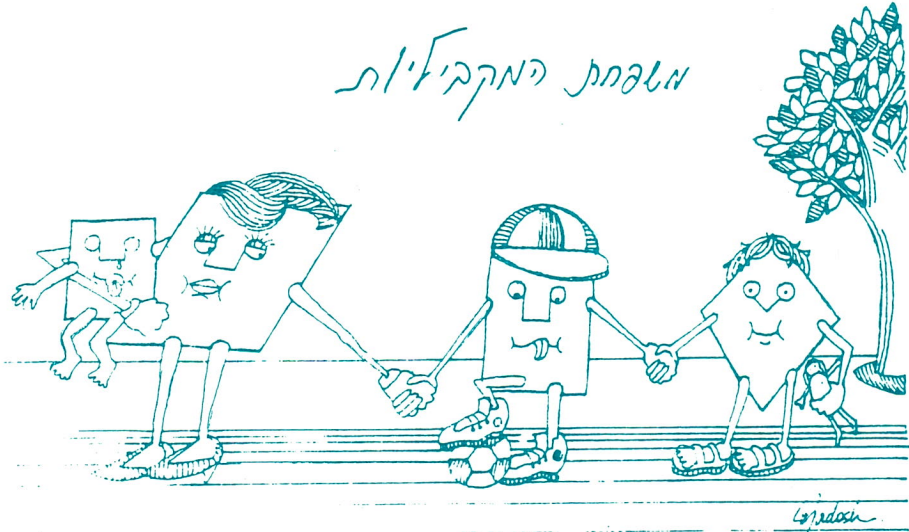


- ** 130. נתונה מקבילית ABCD. הישר a עובר דרך קודקוד D, אינו חותך את המקבילית. נתון:
 $AM \perp a$, $CN \perp a$, $PB \perp a$.
 הוכח:
 $BP = AM + CN$
 רמז: העבר מקביל ל- NP דרך C.

תשובות

	ד	ב	(3	25°	113°	(2	140°	40°	140°	(1		
	95°	85°	ה	120°	60°	ד	ג	105°	75°	ב	(4	
	120°	60°	ב	130°	50°	א	(5	130°	58°	י		
		36°	144°	(7	115°	65°	(6		לא יתכן			
	45°	135°	(11	40°	140°	(9	60°	120°	(8			
		5	8	ב	9	4	א	(14		ג	(13	
	5,10	(16		1:1	ג	3:2	ב	2:3	א	(15		
	20	(27	30,34	(26	3	(24	7	(18	7	(17		
	4	9	(37	12	9	(36	70°	110°	(32	4	(28	
4	(55	3	(54	10	3	(41	א	ב	כר	(40	לא	(39
	6	2	א	(72	30°	(66	65°	84°	(61	8	(57	
	5	3	79	7	(75	4	(74	60°	(73	5	2	ב
	6	(86	5	(85	50	ב	(84	3	(83	ג	ב	(82
	12	(98	(4a-4)	ד	2k	ג	4a	ב	64	א	(97	
	4	(101	9	(100	(a+b)	ב	ג	(2a+b)	א	(99		
				7	(109	22.5°	(107	7	(102			

משפחת פתקביץ/אור



5. הטרפז

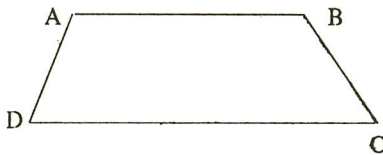
הטרפז הוא מרובע, שבו רק זוג אחד של צלעות נגדיות מקבילות. צלעות אלה נקראות **בסיסים**. כל זוג זוויות שמונחות על בסיס אחד נקראות **זוויות בסיס**. הצלעות הבלתי מקבילות של הטרפז נקראות **שוקיים**. המרחק בין המקבילים הוא **גובה הטרפז**.

יתכונות הטרפז.

5.1 משפט



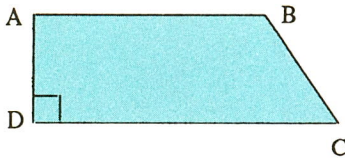
זוויות הטרפז המונחות על שוק אחת משלימות זו את זו ל- 180° .



$$\begin{aligned} \angle A + \angle D &= 180^\circ \\ \angle B + \angle C &= 180^\circ \end{aligned}$$

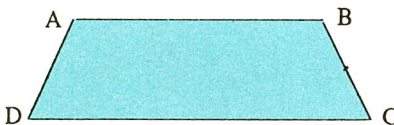
נימוק: הזוויות C ו-B והזוויות A ו-D הן זוויות חד-צדדיות בין מקבילים.

5.2 קיימים שני סוגים של טרפזים מיוחדים: ישר-זווית ושוקיים.



טרפז ישר-זווית – טרפז שבו אחת השוקיים מאונכת לשני הבסיסים. השוק הזו משמשת גם כגובה הטרפז.

$$\begin{aligned} AD &\perp AB \\ AD &\perp DC \end{aligned}$$



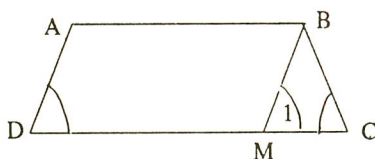
טרפז שווה-שוקיים – כפי ששמו מעיד – טרפז ששתי שוקיו שוות זו לזו.

תכונות הטרפז שווה-שוקיים.

5.3 משפט



בטרפז שווה-שוקיים, שוות הזוויות ליד כל בסיס.



נתון	$AB \parallel CD$ $AD = BC$
צ"ל	$\angle A = \angle B$ $\angle C = \angle D$

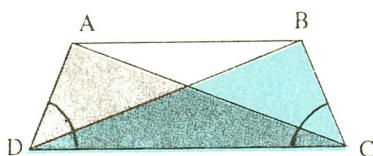
הוכחה	בי"ע: $BM \parallel AD$ מתקבלת מקבילית $ABMD$ $AD = BM \Leftarrow$ וכן $AD = BC$ (נתון) $BM = BC \Leftarrow$ $\angle M_1 = \angle C$ (1) $\Leftarrow$ $\angle M_1 = \angle D$ (2) $\Leftarrow$ (מתאימות בין מקבילים) מ - (1) ומ - (2) מקבלים: $\angle D = \angle C$ $\angle A = \angle B \Leftarrow$ (משלימות את $\angle C$ ו- $\angle D$ ל- 180°).
-------	---

מ.ש.ל.

משפט 5.4



האלכסונים בטרפז שווה-שוקיים שווים זה לזה.



נתון	$AB \parallel CD$ $AD = BC$
צ"ל	$AC = BD$

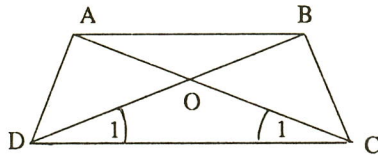
הוכחה	$\triangle BDC \cong \triangle ACD$ (לפי מ.ח. I) $BC = AD$ (נתון) $DC = DC$ (צלע משותפת) $\angle BCD = \angle ADC$ (זוויות בסיס) $AC = BD \Leftarrow$ (ח.מ.ב.ח.)
-------	--

מ.ש.ל.

5.5 משפט



האלכסונים בטרפז שווה-שוקיים מחלקים זה את זה, כך שקטעיהם הקרובים לכל בסיס שווים זה לזה.



הוכחה: מהוכחת המשפט הקודם מקבלים:

$$\angle D_1 = \angle C_1 \quad (\text{ח.מ.ב.ח.})$$

$$\text{לכן } DO = CO$$

$$\text{והוכחנו } BD = AC$$

$$\Leftarrow AO = BO \quad (\text{חיסור שיויונים})$$

מ.ש.ל.

לפי המשפט הנ"ל $\triangle AOB$ ו- $\triangle COD$ הם משולשים שוו-שוקיים, שכל זוויותיהם שוות בהתאמה.

משפטים הפוכים - משפטים לזיהוי טרפז שווה-שוקיים.

5.6 משפט (הפוך)



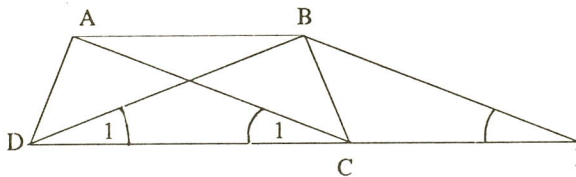
אם בטרפז, הזוויות על-יד בסיס אחד שוות זו לזו, הטרפז הוא שווה-שוקיים.

ההוכחה דומה להוכחה של המשפט הישר, כולל בי"ע.

5.7 משפט (הפוך)



אם בטרפז, האלכסונים שווים זה לזה, הטרפז הוא שווה-שוקיים.



נתון	$AB \parallel CD$ $AC = BD$
צ"ל	$AD = BC$
הוכחה	בי"ע: $BF \parallel AC$ (בהמשך DC) $AB \parallel CF$ (נתון) $ABFC$ מקבילית $\Leftarrow$ $BF = AC \Leftarrow$

$$\begin{aligned}
 & \text{(נתון)} \quad BD = AC \\
 & \text{לכן} \quad BF = BD \\
 & \angle D_1 = \angle F \Leftarrow \\
 & \text{(מתאימות בין מקבילים)} \quad \angle C_1 = \angle F \\
 & \text{לכן} \quad \angle D_1 = \angle C_1 \\
 & \Delta ABCD \cong \Delta ADC \quad (\text{מ.ח. I. עפ"י:} \\
 & \angle D_1 = \angle C_1, \quad BD = AC, \quad DC = DC \\
 & \text{(ח.מ.ב.ח.)} \quad AD = BC \Leftarrow
 \end{aligned}$$

מ.ש.ל.

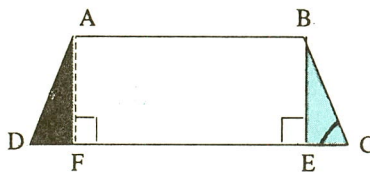
5.8 משפט (הפוך)



אם במרובע האלכסונים חותכים זה את זה, כך ששני החלקים של האחד, שווים בהתאמה לשני החלקים של השני, המרובע הוא טרפז שווה-שוקיים. הוכח!

5.9 דוגמה

בטרפז שווה-שוקיים ABCD נתון $BE \perp CD$. הוכח כי הקטע DE שווה למחצית סכום הבסיסים.



מרובע ABCD $AB \parallel CD$ $AD = BC$ $BE \perp CD$	נתון
$DE = \frac{AB + CD}{2}$	צ"ל
ב"ע: $AF \perp DC$ (שני אנכים לישר שלישי מקבילים) $AF \parallel BE \Leftarrow$ (נמק!) $ABEF$ מלבן $\Leftarrow$ נסמן מסקנה זו ב-1. $AB = FE \Leftarrow$ (לפי מ.ח. II) $\Delta ADF \cong \Delta BCE$ $\angle F = \angle E, \quad \angle D = \angle C, \quad AD = BC$	הוכחה

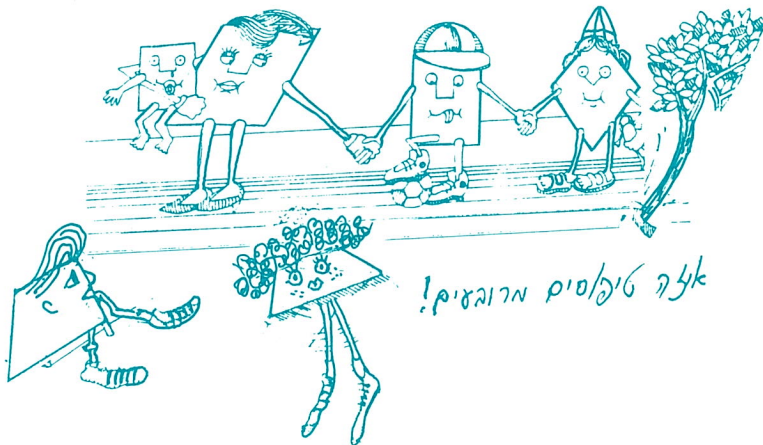
DF = EC $\Leftarrow$ מסקנה זו נסמן ב- 2
נבדוק מה גודל מחצית סכום הבסיסים.

$$\begin{aligned} \frac{AB + CD}{2} &= \text{(לפי 1)} \frac{FE + CD}{2} = \frac{FE + DF + FE + EC}{2} = \\ &= \text{(לפי 2)} \frac{FE + 2DF + FE}{2} = \frac{2FE + 2DF}{2} = \frac{2(FE + DF)}{2} = \\ &= FE + DF = DE \end{aligned}$$

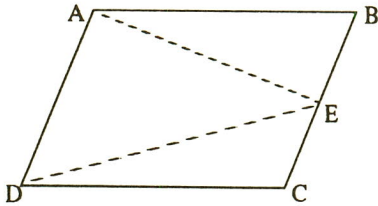
מ.ש.ל.

הקטעים AF ו- BE הם גבהי הטרפז.

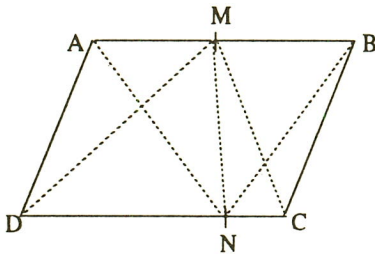
את המסקנות 1 ו- 2 יש לזכור בזכות עצמן בגלל שימושן הרב.



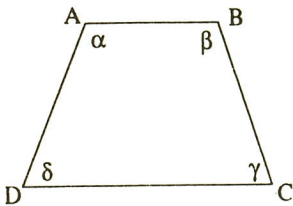
תרגילים



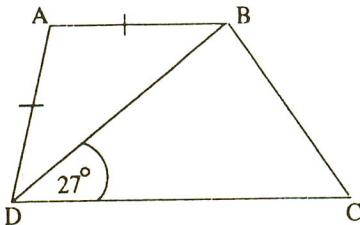
1. ABCD מקבילית. E נקודה על BC.
מצא בשרטוט 2 טרפזים.



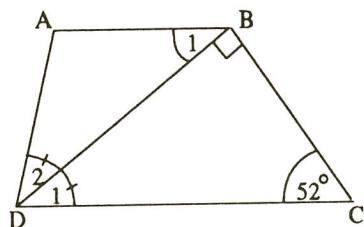
2. ABCD מקבילית. M נקודה על AB, N - על DC.
מצא בשרטוט זה 6 טרפזים.



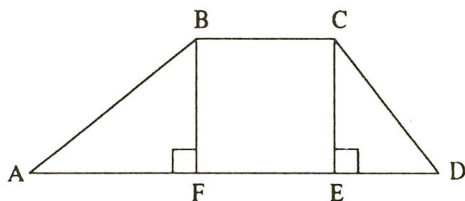
3. חשב את זוויות הטרפז
ABCD ($AB \parallel CD$) כאשר נתון:
א - $\alpha = 100^\circ$, $\gamma = 65^\circ$
ב - $\alpha = 95^\circ$, $\beta = \gamma + 40^\circ$
ג - $\alpha = \delta + 35^\circ$, $\gamma = \beta - 57^\circ$
ד - $\beta = \gamma + 58^\circ$, $\alpha = 2\gamma$



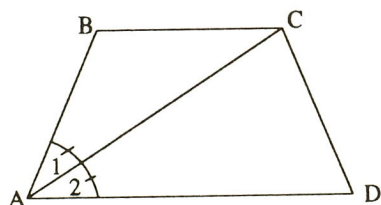
4. ABCD טרפז $AB \parallel DC$
 $\angle BDC = 27^\circ$, $AD = AB$
א - חשב את $\angle A$
ב - חשב את $\angle DBC$
אם $\angle ABC = 3\angle C$



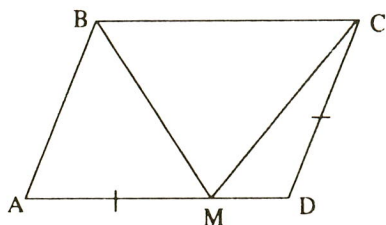
5. $AB \parallel DC$, טרפז, $ABCD$
 BD חוצה את הזווית D ,
 $\angle C = 52^\circ$, $BD \perp BC$
 חשב את הזוויות $\angle B_1$ ו- $\angle D_1$.



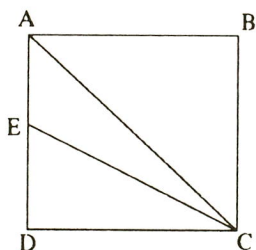
6. $AD \parallel BC$ טרפז $ABCD$
 $BCEF$ ריבוע
 E אמצע של FD
 $AB = FD$
 חשב את זוויות הטרפז.



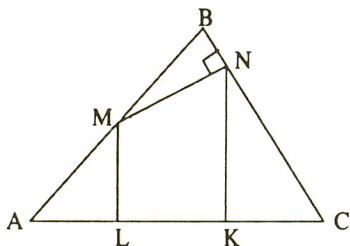
7. $AD \parallel BC$ טרפז $ABCD$
 AC חוצה את הזווית A .
 הוכח כי הבסיס BC
 שווה לשוק AB .



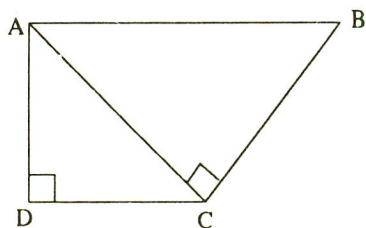
8. $ABCD$ מקבילית
 $AM = CD$ נתון
 א - הוכח כי $BCMA$ טרפז
 ב - הוכח כי האלכסון BM של
 הטרפז חוצה את $\angle B$.



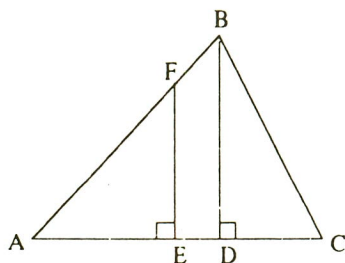
9. $ABCD$ בריבוע נתון $CE = 2DE$
 א - איזה סוג מרובע הוא $ABCE$.
 ב - חשב את זוויותיו.



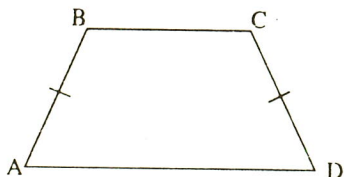
10. במשולש ABC נתון
 $\angle C = 72^\circ$, $NK \perp AC$, $ML \perp AC$, $MN \perp BC$
 א - איזה סוג מרובע הוא MNKL
 ב - חשב את זוויתו.



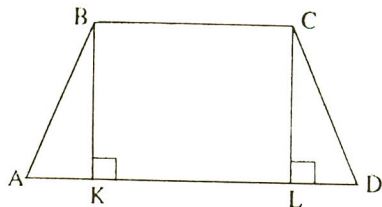
11. ABCD טרפז ישר זווית.
 $AC \perp BC$, $AD \perp DC$
 הוכח: זוויות המשולשים
 ABC ו-ACD שוות זו לזו בהתאמה.



12. BD גובה במשולש ABC. FE אנך
 $AC = 2FE$, AC לצלע
 א - איזה סוג מרובע FBDE
 ב - הוכח כי בטרפז FBDE, שווה השוק
 ED להפרש בסיסיו.

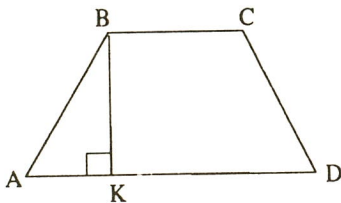
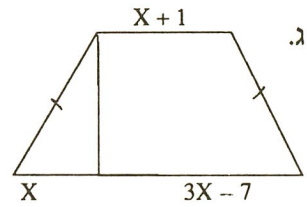
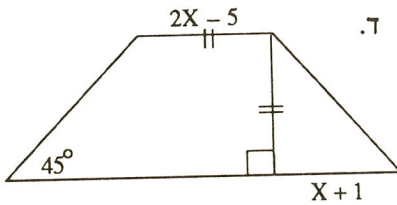
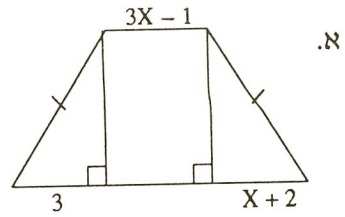
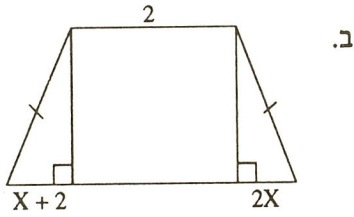


13. ABCD טרפז שווה שוקיים $AD \parallel BC$,
 $AD = 2AB$, $BC = 12$ ס"מ
 היקף הטרפז 52 ס"מ.
 חשב את צלעות הטרפז.

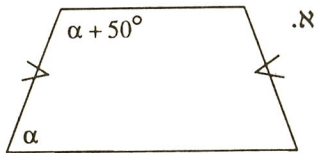


14. ABCD טרפז שו"ש. $AD \parallel BC$, BK ו-CL
 מאונכים ל-AD.
 א - מהו סוג המרובע BCLK
 ב - הוכח: $\triangle ABK \cong \triangle DCL$

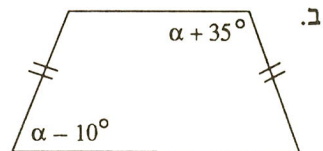
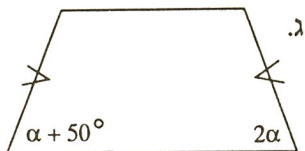
15. חשב את בסיסי הטרפז שווה השוקיים:

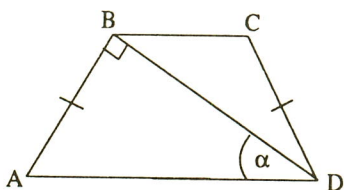


16. $ABCD$ טרפז שווה שוקיים.
אורך השוק $AB = 8$ ס"מ.
היקף הטרפז 44 ס"מ, $\angle A = 60^\circ$
חשב את בסיסי הטרפז.



17. בכל אחד מהשרטוטים הבאים מופיע
טרפז שווה שוקיים. חשב את זוויתיו!





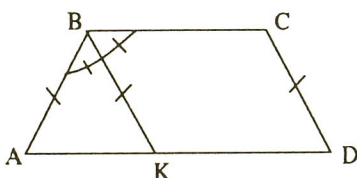
18. ABCD טרפז שווה שוקיים.

BD מאונך לשוק AB.

$\alpha = 30^\circ$, $AD = 16$ ס"מ.

א - חשב את זוויות הטרפז

ב - חשב את AB ואת BC.



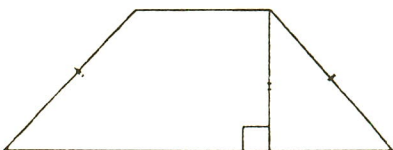
19. ABCD טרפז שווה שוקיים ($AD \parallel BC$).

BK חוצה הזוית B.

$BK = CD$

א - הוכח כי BCDK מקבילית.

ב - חשב את זוויות הטרפז.

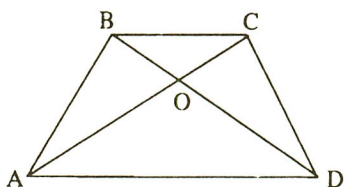


20*. בטרפז שווה שוקיים שווה הגובה

למחצית הפרש הבסיסים.

הוכח: שוקי הטרפז מאונכות זו לזו

(בהמשכהן).

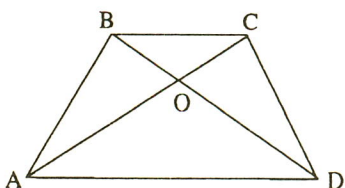


21. ABCD טרפז ש"ש ($AB = CD$)

היקף $\triangle ACD$ גדול מהיקף $\triangle BCD$

ב-4 ס"מ. 3 ס"מ $BC =$

חשב את AD.

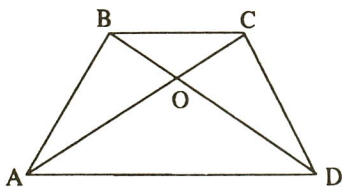


22. בטרפז ABCD ($AB = CD$) שווה היקף

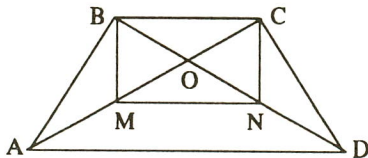
$\triangle ABD$ ל-17 ס"מ

והיקף $\triangle ABC$ - 13 ס"מ, 7 ס"מ $AD =$

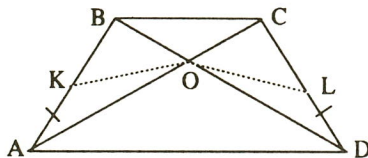
חשב את אורך BC.



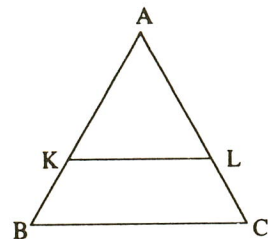
23. ABCD טרפז שווה שוקיים ($AB=CD$)
 $DO=3BO$, $AC=12$ ס"מ
 חשב את CO ואת DO .



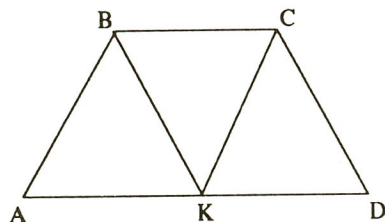
24. ABCD טרפז שווה שוקיים ($AB=CD$).
 נתון: $AM=MO=OC$
 $BO=ON=ND$
 הוכח: BCON מלבן.



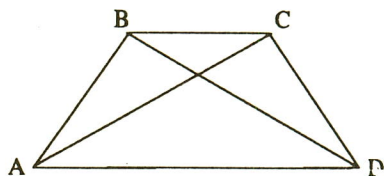
25. ABCD טרפז שווה שוקיים ($AB=CD$).
 נתון: $AK=DL$
 הוכח: $KO=LO$



26. $\triangle ABC$ משולש שווה שוקיים ($AB=AC$).
 $AK=AL$: נתון
 הוכח: א - $KLCB$ טרפז.
 ב - $BL=KC$ (ללא שימוש בחפיפת משולשים).



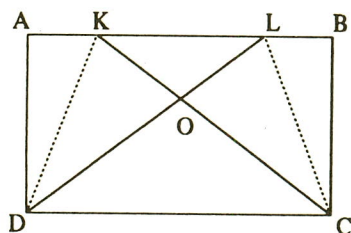
27. ABCD טרפז ($AD \parallel BC$) חוצי הזווית
 B ו-C נפגשים באמצע K של הבסיס AD.
 הוכח: הטרפז ABCD הוא שווה-שוקיים.



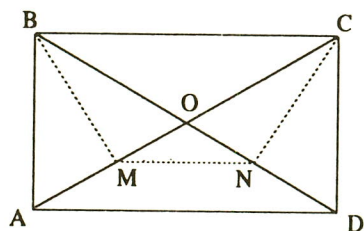
28. אלכסוני הטרפז חוצים את הזוויות
החדות A ו-D.
הוכח: ABCD טרפז שווה שוקיים.

29. בתנאי הבעיה הקודמת, נתון $AD=2BC$, היקף הטרפז 25 ס"מ.
חשב את AB.

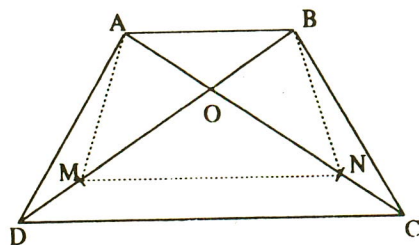
30. שרטט טרפז, שבו חוצים האלכסונים את הזוויות הקהות של הטרפז.
איזו תכונה לטרפז זה. הוכח!!



31. ABCD מלבן.
נתון: $\angle ALD = \angle BKC$
א - הוכח: $OC=OD$
ב - הוכח: טרפז DKLC שווה שוקיים.

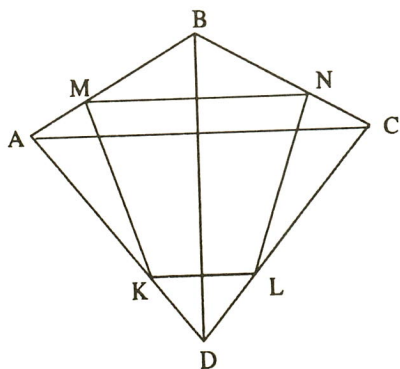


32. ABCD מלבן
AMND טרפז שווה שוקיים.
הוכח: BMNC טרפז שו"ש.



33* ABCD טרפז שו"ש ($AD=BC$)
נתון: $DM=CN$
הוכח: ABNM טרפז שווה-שוקיים.



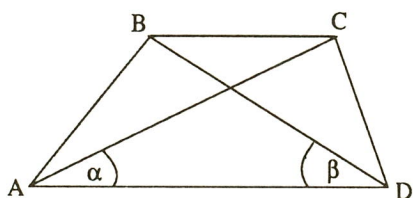


34*. ABCD דלתון (D-ב קודקדי הראש).

נתון: $MN \perp BD$

$KL \perp BD$

הוכח: MNLK טרפז שווה-שוקיים.



35**. הוכח: אם בטרפז האלכסונים

שווים, הרי האלכסון הגדול יוצר

עם הבסיסים זווית יותר קטנה מזו

שיוצר איתם האלכסון הקטן, כלומר

אם $\alpha < \beta$ אז $AC > BD$.



תשובות

- (1 ; AECD, ABED (2 ; DMBC, ADCM, ANCM, ANCB, MNCB, AMND (3 א- $\delta=80^\circ$, $\beta=115^\circ$; ב- $\delta=85^\circ$; ג- $\gamma=70^\circ$; ד- $\gamma=61.5^\circ$; 4 א- 126° ; ב- 108° ; 5 38° , 76° ; 6 $\angle A=30^\circ$, $\angle D=45^\circ$; 9 ב- 90° , 90° , 60° , 120° ; 10 ב- 90° , 90° , 72° , 108° ; 13 10 , 10 , 20 ; 15 א- 2 , 8 ; ב- 2 , 6 ; ג- 9 , 25 ; ד- 7 , 21 ; 16 10 , 18 ; 17 א- 65° , 115° ; ב- 67.5° , 112.5° ; 18 א- 80° , 100° ; 19 60° , 120° ; 21 7 ; 22 3 , 23 ; 23 3 , 9 ; 29 5 ;

פרק ו: קטע אמצעים

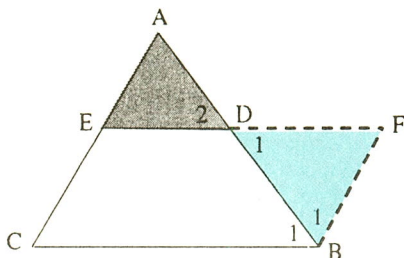
1. קטע אמצעים במשולש

קטע אמצעים במשולש מחבר אמצעי שתי צלעות במשולש.

1.1 משפט:



קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.



נתון	משולש ABC AE = EC AD = DB
צי"ל	א. $DE \parallel BC$ ב. $DE = \frac{BC}{2}$
הוכחה	ב.ע.: $DE = DF$ F-B, $\triangle BFD \cong \triangle AED$ לפי מ.ח.י: $BD = AD$ (נתון), $\angle D1 = \angle D2$ (קודקודיות), $DF = DE$ (בי"ע) $\Leftarrow$ (ח.מ.ב.ח.) $FB = AE$ ונתון $AE = EC$ $\Leftarrow$ (1) $FB = CE$ מהחפיפה נובע גם: $\angle A = \angle B$ (ח.מ.ב.ח.) $\Leftarrow$ (2) $EC \parallel FB$ (זוויות מתחלפות שוות נמצאות בין ישרים מקבילים) מ- (1) ומ- (2) מתקבל ש- $FECB$ מקבילית. $\Leftarrow$ $EF \parallel BC$ כלומר $DE \parallel BC$ (מ.ש.ל. א')

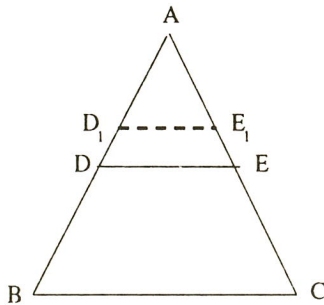
$$\text{וכן } EF = BC \quad \text{או} \quad DE = \frac{BC}{2} \quad (\text{מ.ש.ל. ב}') \quad \left| \right.$$

למשפט זה אפשר לנסח שני משפטים הפוכים:

1.2 משפט (הפוך):



אם קטע, המחבר שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה, הרי הוא קטע אמצעים.



משולש ABC,

$DE \parallel BC$

$$DE = \frac{BC}{2}$$

נתון

$AD = DB$,

$AE = EC$

צ"ל

(בדרך השלילה).

הוכחה

נניח ש- E ו- D אינן אמצעי הצלעות AC ו- AB.

לפיכך, נסמן את אמצעי הצלעות הללו ב- E_1 ו- D_1 .

במקרה זה, צריך להתקיים $D_1E_1 \parallel BC$ וכן $D_1E_1 = \frac{BC}{2}$

אם נצרך למסקנה זו את הנתון $DE \parallel BC$, $DE = \frac{BC}{2}$

נקבל $DE = D_1E_1$

$DE \parallel D_1E_1$

$\Leftarrow DEE_1D$ מקבילית

$\Leftarrow D_1D \parallel E_1E$

וזו סתירה לקיום משולש (צלעות המשולש נחתכות).

על כן חייבים לקבל את המסקנה ש- E, D אמצעי הצלעות אמצעי

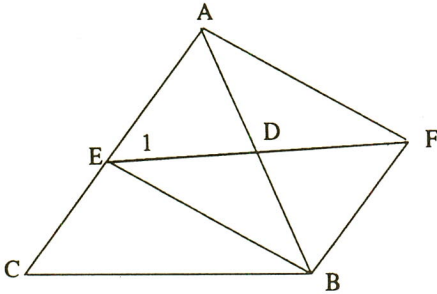
הצלעות AC, AB.

מ.ש.ל.

1.3 משפט (הפוך):

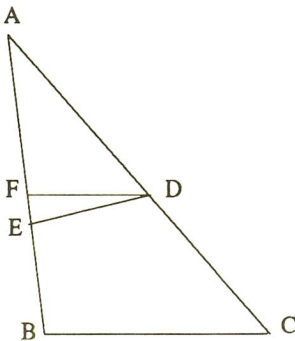


אם קטע יוצא מאמצע צלע אחת של משולש ומקביל לצלע השנייה, הוא חוצה את הצלע השלישית.



$\triangle ABC$	נתון
$AE = EC$	
$DE \parallel BC$	
$AD = DB$	צ"ל
ב"ע: $BF \parallel AC$ (F חותך את המשך ED ב-F.) $EFBC \Leftarrow$ מקבילית $FB = EC \Leftarrow$ (צלעות נגדיות במקבילית) וגם $AE = EC$ (נתון) $FB = AE \Leftarrow$ כמו כן $FB \parallel AE$ (ב"ע) לכן $AFBE$ מקבילית (נמק!) $AD = DB \Leftarrow$ (האלכסונים במקבילית נחצים).	הוכחה

מ.ש.ל.



כאשר אנו משווים נוסח משפט זה, לנוסח המשפט הישר, מתעוררת השאלה הבאה: האם ההנחה שקטע יוצא מאמצע צלע אחת במשולש ושווה למחצית הצלע השנייה, גוררת - גם היא את המסקנה, שהוא מגיע לאמצע הצלע השלישית?

והתשובה: לא בהכרח, כי אם מ-D (אמצע AC) כמרכז, נחוג קשת ברדיוס $\frac{BC}{2}$, תחתוך קשת זו את AB, בשתי נקודות E ו-F. שתיהן מקיימות את תנאי הטענה, ולמרות זאת, לא יתכן שגם DF וגם DE יחצו את AB.

2. קטע אמצעים בטרפז

קטע אמצעים בטרפז הוא קטע המחבר אמצעי שוקי הטרפז.

2.1 משפט:



קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.

	נתון ABCD $AB \parallel DC$ $BN = NC$ $AM = MD$
	צ"ל $MN \parallel DC$ $MN = \frac{AB + DC}{2}$
הוכחה בי"ע: חיבור A ל- N (נקודת המפגש של המשכי AN ו- DC). $\triangle ABN \cong \triangle PCN$ לפי מ.ח. II: $\angle N1 = \angle N2$, $\angle B = \angle C1$, $BN = NC$ $\{ \begin{aligned} AB &= CP \text{ (1) (ח.מ.ב.ח.)} \\ AN &= NP \text{ (2) (ח.מ.ב.ח.)} \end{aligned} \} \Leftarrow$ ב- $\triangle ADP$: $AN = NP$, $AM = MD$ $\{ \begin{aligned} MN &\parallel DP \text{ (קטע אמצעים במשולש מקביל)} \\ MN &= \frac{DP}{2} \text{ (לצלע השלישית ושווה לחציה).} \end{aligned} \} \Leftarrow$ $CP = AB$ (לפי 1). לכן: $MN = \frac{DP}{2} = \frac{DC + CP}{2} = \frac{DC + AB}{2}$ מ.ש.ל.	

2.2 משפט (הפוך):



קטע היוצא מאמצע שוק אחת של טרפז ומקביל לאחד מבסיסיו חוצה גם את השוק השניה.

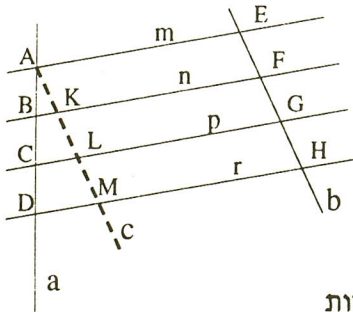
משפט זה מוכח בדומה לקודם, אך הכיוון הפוך. הוכח!

3. מסקנה מתכונות הקטעים האמצעיים במשולש ובטרפז.

משפט:

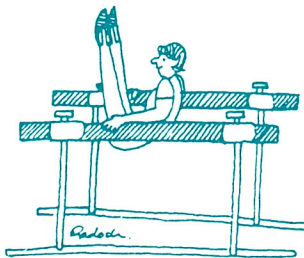


אם קבוצת מקבילים מקצה על ישר אחד, קטעים שווים זה לזה, היא מקצה על כל ישר אחר, שאינו מקביל להם, קטעים שווים זה לזה.



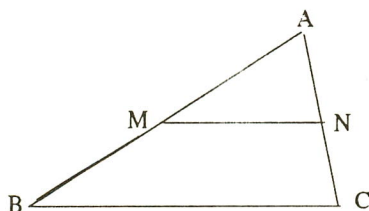
נתון	ישרים a, b $m \parallel n \parallel p \parallel r$ $AB = BC = CD$
צ"ל	$EF = FG = GH$
הוכחה	ב"ע: $c \parallel b$ $\Leftarrow$ מקבילות $LGHM, KFGL, AEFK$ $\Leftarrow$ $LM = GH, KL = FG, AK = EF$ (1) ב- $\triangle ACL$: $AB = BC$ $BK \parallel CL$ $\Leftarrow$ $AK = KL$ (סעיף 1.3) באותו אופן בטרפז $BKMD$ מתקבל: $KL = LM$ (סעיף 2.2) $\Leftarrow$ $AK = KL = LM$ $\Leftarrow$ {ע"ס (1)} $EF = FG = GH$

מ.ש.ל.



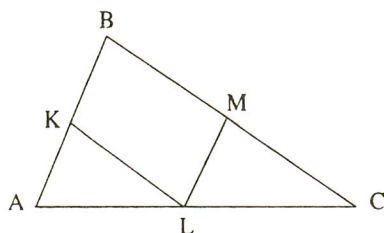
תרגילים

סעיף 1

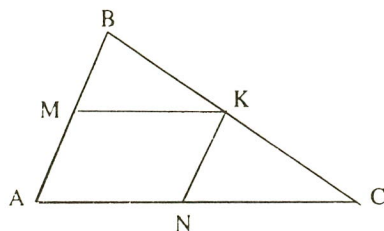


1. MN קטע אמצעים במשולש ABC.
 $AC = 14$ ס"מ, $AB = 18$ ס"מ
 $BC = 16$ ס"מ
 חשב את היקף המשולש AMN.

2. א - איזו צורה למרובע BMNC שבבעיה הקודמת. נמק!
 ב - חשב את היקפו.



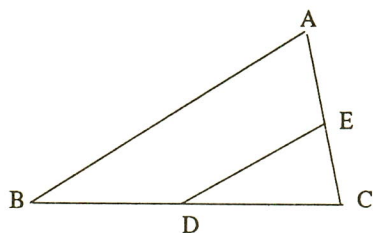
3. K, L ו-M אמצעי צלעות המשולש ABC.
 א - איזו צורה למרובע KLMC? נמק!
 ב - חשב היקף מרובע זה, כאשר:
 $BC = 10$ ס"מ, $AB = 7$ ס"מ



4. K, M ו-N אמצעי צלעות המשולש ABC.
 היקף המשולש ABC - 35 ס"מ.
 היקף המרובע AMKN - 23 ס"מ.
 א - קבע את סוג המרובע הניל.
 ב - חשב את אורך BC.

5. היקפו של משולש הוא 36 ס"מ. חשב את היקף המשולש הנוצר ע"י קטעי האמצעים שלו.

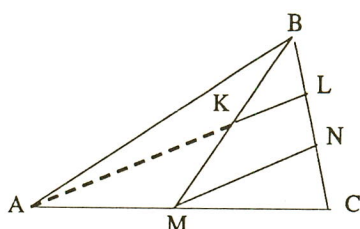
6. אורך שני קטעים אמצעים במשולש: 5 ס"מ ו- 6 ס"מ. היקפו של המשולש 29 ס"מ. חשב את צלעות המשולש.



7. היקף משולש ABC 52 ס"מ.
 DE קטע אמצעים במשולש.
 8 ס"מ = BD, 11 ס"מ = DE.
 חשב את AC.

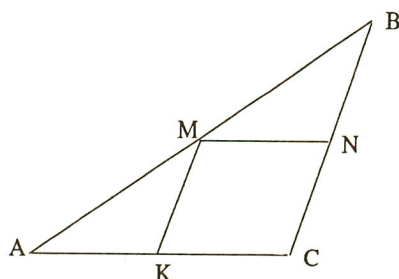
8. קטעי האמצעים של משולש מתיחסים זה לזה כמו 4 : 3 : 3. היקף המשולש הוא 60 ס"מ. חשב את צלעות המשולש.

9. היקפו של משולש 72 ס"מ. היחס בין הקטעים האמצעים בו הוא:
 א - 4 : 3 : 2 ב - 3 : 2 : 1 ג - 13 : 7 : 4
 היתכן משולש כזה. נמק!

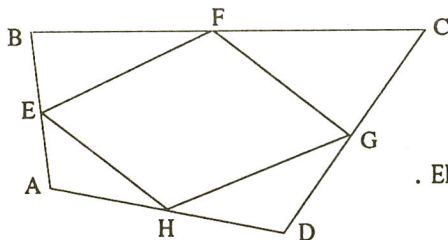


10. BM תיכון במשולש ABC.
 K אמצע התיכון.
 N - אמצע BC, L - אמצע BN,
 א - הוכח: ABLK טרפז.
 ב - 3 ס"מ = KL. חשב את AB.

11. הוכח: קטע אמצעים במשולש יוצר משולש שזוויותיו שוות לזוויות המשולש הנתון.

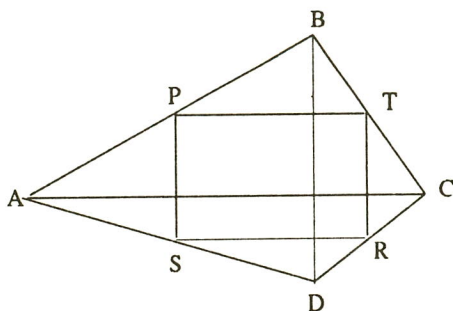


12. ABC משולש שווה שוקיים (AC = BC)
 N, M ו- K אמצעי צלעותיו.
 הוכח: MNCK מעוין.



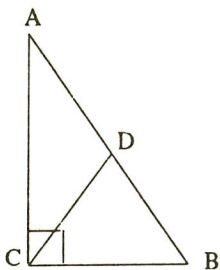
13. E, F, G, H הן אמצעי
 צלעות מרובע ABCD.
 הוכח: EFGH מקבילית.
 רמז: שרטט אלכסון BD
 ומצא את הקשר שלו ל-FG ול-EH.

14. הוכח: אם אלכסונו של מרובע שווים זה לזה, אמצעי צלעותיו הם קודקודים של מעוין.

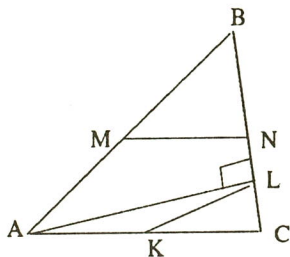


15. הוכח: אם במרובע ABCD, מאונכים האלכסונים זה לזה, אזי אמצעי צלעותיו R, T, P, S הם קודקודים של מלבן.

16. איזה סוג של מרובע מתקבל, כאשר מחברים אמצעי צלעותיו של:
 א- מלבן ב- מעוין ג- דלתון. נמק!

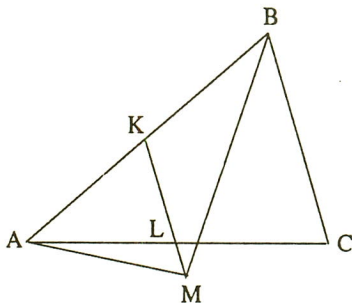


- 17*. העזר בתכונות קטע אמצעים במשולש, כדי להוכיח שהתיכון ליתר שווה למחצית היתר.
 רמז: חבר את D לאמצע AC.



- 18*. M, N, K אמצעי צלעות המשולש ABC.
 $AL \perp BC$
 הוכח: $MN = KL$

19. העזר בתכונות קטע אמצעים כדי להוכיח:
אם במשולש, שווה צלע אחת לכפליים התיכון שלה, המשולש הוא ישר זווית
(הצלע הנ"ל הוא היתר).



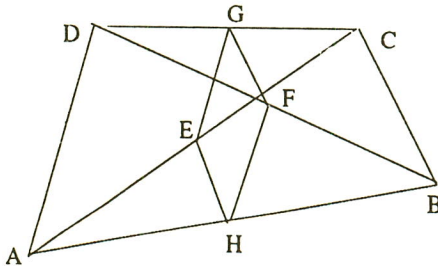
20. ** K ו-L אמצעי צלעות, במשולש ABC.

KL חותך את חוצה הזווית B

ב-M. נתון: $AB > BC$

הוכח: א - $AM \perp BM$

ב - $AB - BC = 2LM$



21. * במרובע ABCD, G ו-H הם

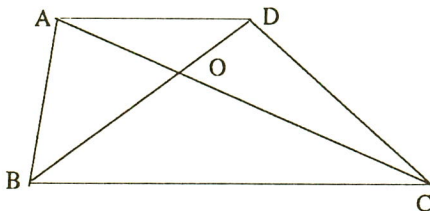
אמצעי הצלעות הנגדיות

DC ו-AB.

E ו-F הם אמצעי האלכסונים

AC ו-BD.

הוכח כי GEHF מקבילית.



22. בטרפז ABCD נתון: $BC = 2AD$.

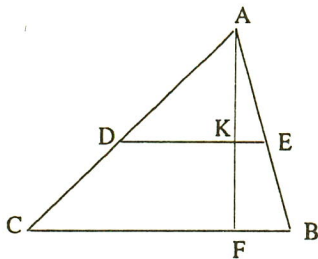
הוכח כי:

$AC = 3 AO$

$BD = 3 DO$

רמז: חבר את אמצעי הצלעות

OC ו-OB.

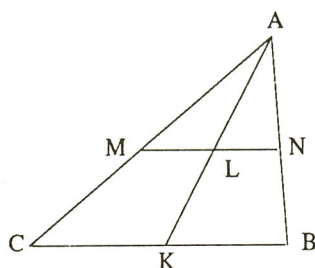


23. DE קטע אמצעים במשולש ABC

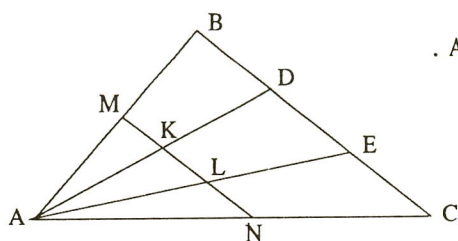
F נקודה על CB.

K נקודת החיתוך של DE ו-AF.

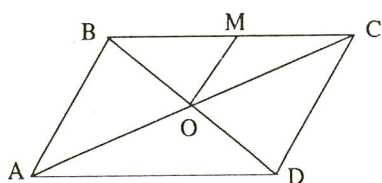
הוכח: $AK = KF$



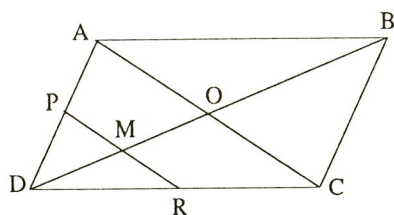
24. MN קטע אמצעים במשולש ABC.
AK תיכון ל- CB
הוכח: $ML = LN$



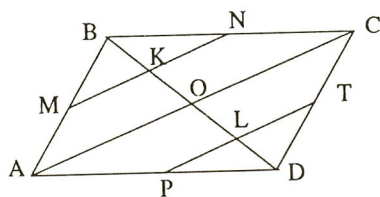
25. MN קטע אמצעים במשולש ABC.
נתון: $90^\circ \angle M$
 $BD = DE = EC$
חשב את: KL , MK ו- KN .



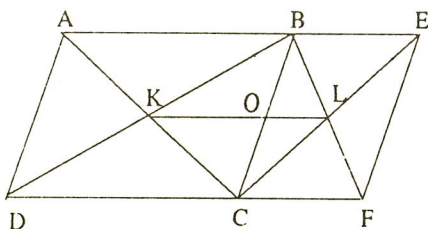
26. ABCD מקבילית
 $OM \parallel CD$
הוכח: $AD = 2BM$



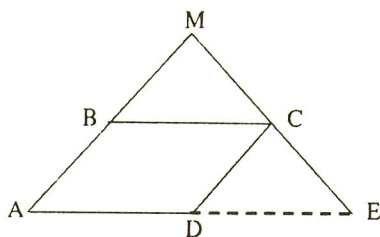
27. נתונה מקבילית ABCD. P ו- R
אמצעי הצלעות AD ו- DC.
הוכח: א. האלכסון BD חוצה את
הצלע PR.
ב. $OB = 2DM$



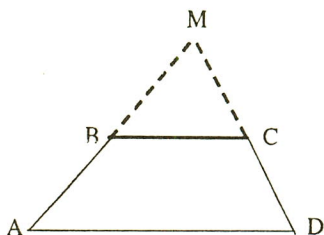
28. M, N, T ו- P אמצעי
צלעות המקבילית.
הוכח: $BD = 4OL$



29. נתונות שתי מקביליות
 $ABCD$ ו- $BEFC$.
 BE ו- CF המשכי צלעות
 המקבילית $ABCD$
 K ו- L נקודות מפגש האלכסונים.
 הוכח: $BO = OC$

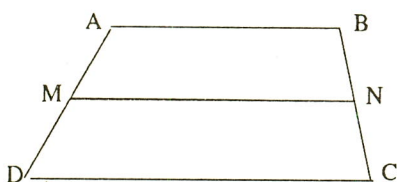


30. $ABCD$ מקבילית. את
 הצלע AD המשיכו כאורכה -
 M נקודת המפגש של $AD = DE$
 המשכי AB ו- EC .
 הוכח (בלי להעזר בחפיפת
 משולשים): $AB = BM$

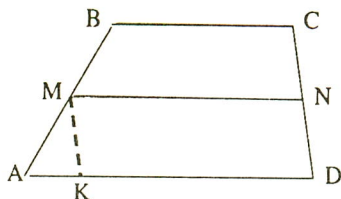


31. בטרפז $ABCD$ גדול הבסיס AD
 פי 2 מהבסיס BC .
 המכשי השוקיים נפגשים ב- M .
 הוכח: $AM = 2AB$

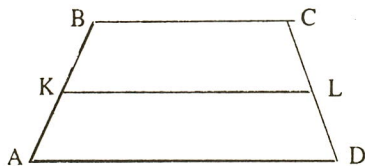
סעיף 2



32. MN קטע האמצעים
 בטרפז $ABCD$
 נתון: $AD = 7$ ס"מ, $BC = 5$ ס"מ
 $MN = 8$ ס"מ
 חשב את היקף הטרפז.

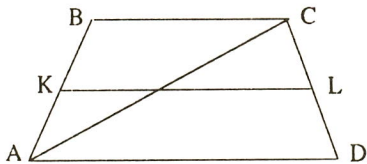


33. MN קטע האמצעים
 בטרפז $ABCD$, $MK \parallel CD$
 $AD = 10$ ס"מ; $CD = 6$ ס"מ; $BC = 7$ ס"מ
 א - הוכח: $MNDK$ מקבילית
 ב - חשב את היקפה

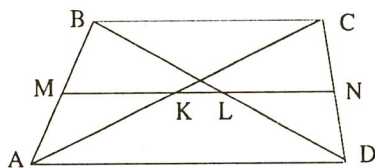


34. ABCD טרפז שווה שוקיים
 KL קטע האמצעים
 $AB = 8$ ס"מ, $KL = 9$ ס"מ
 חשב את היקף הטרפז.

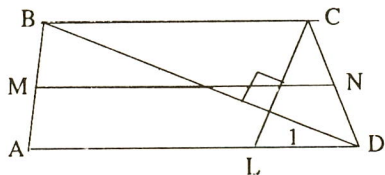
35. היקפו של טרפז שוו"ש 30 ס"מ. אורך השוק 7 ס"מ. חשב את אורך קטע האמצעים בטרפז.



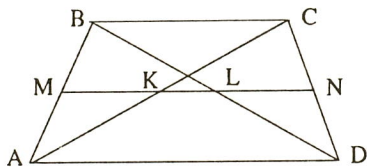
36. ABCD טרפז שוו"ש
 היקפו של $\triangle ACD$ גדול מהיקף $\triangle ABC$ ב-2 ס"מ.
 $KL = 8$ ס"מ (קטע האמצעים)
 חשב את BC ו-AD.



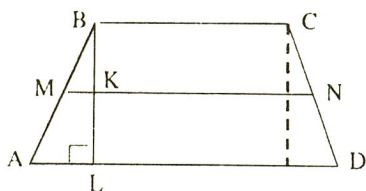
37. MN קטע האמצעים בטרפז ABCD
 $AD = 18$ ס"מ, $BC = 12$ ס"מ
 חשב את ML ואת KL.



- 38* MN קטע האמצעים בטרפז ABCD
 $\angle D_1 = 30^\circ$, $CL \perp BD$
 $CL = 8$ ס"מ, $AL = 9$ ס"מ
 חשב את MN.

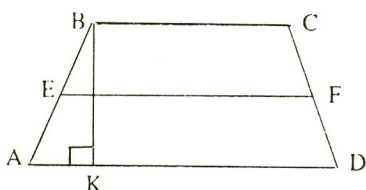


39. ABCD טרפז שוו"ש, MN קטע האמצעים שלו.
 הוכח: טרפז AKLD שווה-שוקיים.



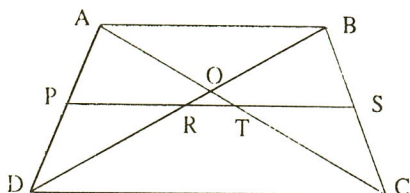
40. ABCD טרפז שוו"ש.

MN קטע האמצעים, $BL \perp AD$.
נתון: $AL = 4$ ס"מ, $KN = 9$ ס"מ.
חשב את MN ואת אורך הבסיסים.



41. ABCD טרפז שוו"ש.

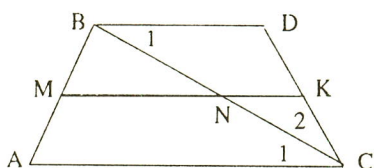
EF קטע האמצעים,
 $BK \perp AD$
הוכח: $KD = EF$



42. PS קטע האמצעים בטרפז ABCD.

הוכח, כי האלכסונים חותכים
ממנו, שני קטעים שווים $TS = PR$

43. בתנאי הבעיה הקודמת, אם הבסיס CD של הטרפז, גדול פי שנים, מהבסיס AB, אז קטע האמצעים מתחלק ע"י האלכסונים, לשלושה קטעים שווים.

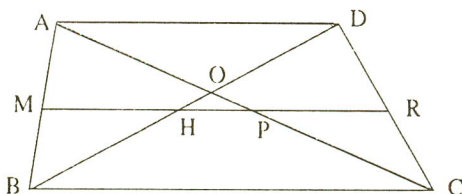


44. MN קטע האמצעים

במשולש ABC

$$\angle B_1 = \angle C_1 = \angle C_2$$

הוכח: $AC + DC = 2MK$



* 45. בטרפז ABCD, MR הוא קטע

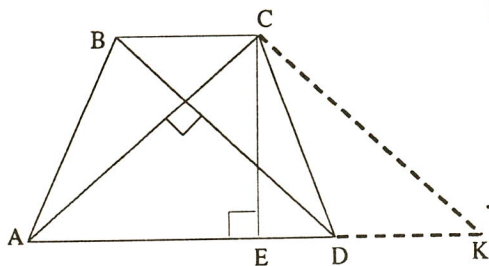
אמצעים. הראה, שחלקו של

קטע האמצעים, הנמצא בין

האלכסונים HP - שווה למחצית

הפרש בסיסי הטרפז.

46. קטע האמצעים בטרפז שווה ל- 12 ס"מ. חלקו של קטע האמצעים הנמצא בין אלכסוני הטרפז שווה ל- 2 ס"מ. חשב את בסיסי הטרפז.



* 47. ABCD טרפז שוו"ש ($BC \parallel AD$)

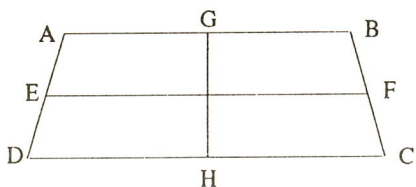
. $AC \perp BD$, $CE \perp AD$

הוכח: קטע האמצעים בטרפז

שווה ל- CE .

רמז: $CK \parallel BD$

ובדוק את סוג המשולש ACK .



* 48. נתון טרפז ABCD. G ו- H הם

אמצעי בסיסיו. הוכח, כי אם GH

מאונך לקטע האמצעים של

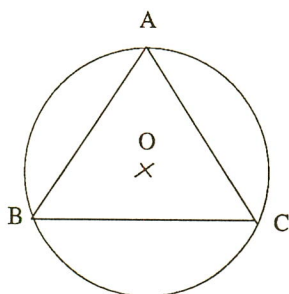
הטרפז, הרי $AD = BC$.

תשובות

1) 24 ; 2) 40 ; 3) 17 ; 4) 12 ; 5) 18 ;
 6) 10, 12, 7 ; 7) 14 ; 8) 18, 18, 24 ; 9) א- כו ;
 ב, ג- לא ; 10) 12 ; 16) א- מעוין ; ב- מלבן ;
 ג- מלבן ; 25) 3, 3, 6 ; 28) 33 ; 23) 34 ; 34)
 35) 8 ; 36) 7, 9 ; 37) 9, 3 ; 38) 12.5 ;
 40) 11, 7, 15 ;

פרק ז: נקודות מיוחדות במשולש

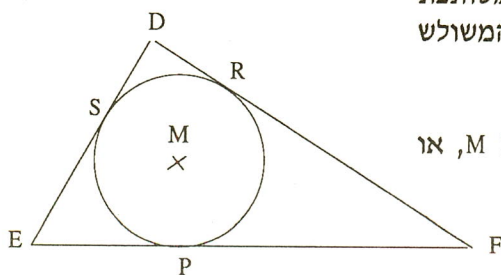
במשולש - ארבע נקודות מיוחדות, המתקבלות כתוצאה מתכונות, של ארבעת הקווים: חוצה-זווית, אנך אמצעי, תיכון וגובה.



נגדיר שני מושגים שנשתמש בהם בפרק זה:

מעגל חוסם משולש (או מצולע) הוא מעגל, שעובר דרך קודקודי המשולש (או המצולע).

המעגל O חוסם את המשולש ABC או: המשולש ABC חסום במעגל O.



מעגל חסום במשולש (או מצולע) הוא מעגל שיש לו נקודה אחת בלבד, משותפת עם כל צלע, והוא נמצא בתוך המשולש (או בתוך המצולע).

משולש DEF חוסם את המעגל M, או המעגל חסום המשולש DEF.

1. מרכז המעגל החוסם משולש

נסקור את תכונות האנך האמצעי, שעליהן מתבסס המשפט העיקרי בסעיף זה:

1.1 משפט:



כל נקודה, על האנך האמצעי לקטע, נמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע.

1.2 משפט (הפוך):



אם נקודה שמחוץ לקטע, נמצאת במרחקים שווים מקצותיו, הרי היא נמצאת על האנך האמצעי של אותו קטע.

כתוצאה משני משפטים אלה מתקבלת המסקנה הבאה:

1.3 משפט:

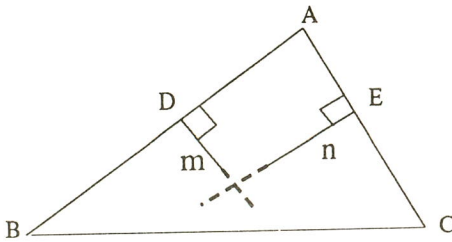


שלושת האנכים האמצעים במשולש, נפגשים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל, החוסם את המשולש.

משפט זה מוכיחים בשני שלבים:

א. שני אנכים אמצעיים נחתכים (לא מקבילים).

ב. האנך האמצעי השלישי עובר דרך נקודת החיתוך של שני האחרים.



שלב א'

במשולש ABC נתון:

$Dm \perp AB$, $AD = DB$

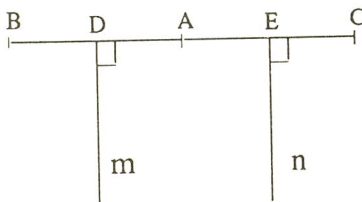
$En \perp AC$, $AE = EC$

נוכיח: $Dm \parallel En$

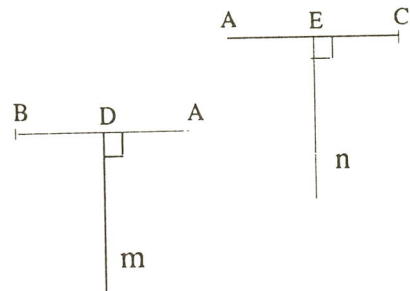
אילו היה אפשרי ש: $Dm \parallel En$,

היה צריך לקרות אחד משני

המצבים הבאים:



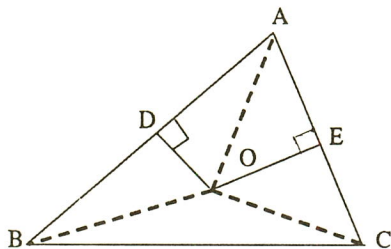
מצב 2



מצב 1

או שהצלעות AC ו-AB מקבילות זו לזו (מצב 1), או שהן מונחות על ישר אחד (מצב 2). בשני המקרים לא יתכן קיום המשולש ABC. לפיכך, מתקבל $D_m \neq E_n$, כלומר האנכים האמצעיים נחתכים.

מ.ש.ל.



שלב ב'

נוכיח שנקודת החיתוך O של האנכים האמצעיים DO ו-EO נמצאת על אנך האמצעים לצלע BC.

O נמצאת על DO

$$\Leftarrow (1) \quad AO = BO \quad (\text{לפי 1.1}).$$

O נמצאת על EO

$$\Leftarrow (2) \quad AO = CO \quad (\text{לפי 1.1}).$$

$$\Leftarrow \quad CO = BO \quad (\text{ע"ס 1 ו-2}).$$

$$\Leftarrow \quad O \text{ נמצאת על האנך האמצעי של } BC \quad (\text{לפי 1.2}).$$

מ.ש.ל.

מסקנה:

קבלנו נקודה O, הנמצאת במרחקים שווים, משלושת קודקודי המשולש: A, B ו-C. פרוש הדבר, ש-O היא מרכז של מעגל שעובר דרך הנקודות A, B ו-C - המעגל החוסם את המשולש.

2. מרכז המעגל החוסם במשולש

נסקור את תכונות חוצה-הזווית, שעליהן מתבסס המשפט העיקרי של סעיף זה:

2.1 משפט:

כל נקודה על חוצה-זווית, נמצאת ברוחקים שווים משוקי הזווית.



2.2 משפט (הפוך):



אם נקודה נמצאת ברוחקים שווים משוקי זווית, היא תהיה מונחת על חוצה הזווית.

משתי תכונות אלה נובע:

2.3 משפט:

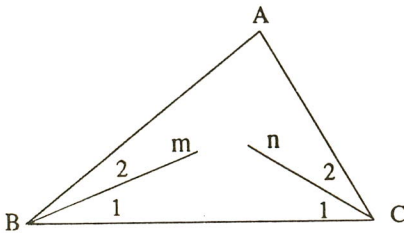


שלושת חוצי הזוויות הפנימיות במשולש נפגשים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש.

גם משפט זה מוכח בשני שלבים:

א. החוצים של שתי זוויות במשולש נחתכים (כלומר, אינם מקבילים).

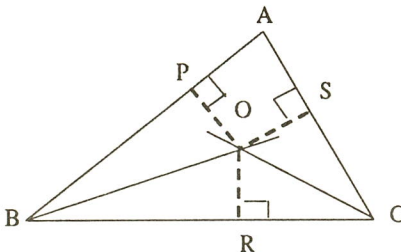
ב. חוצה הזווית השלישית, עובר דרך נקודת הפגישה, של שני החוצים הראשונים.



שלב א'

נראה שחוצי הזווית B ו-C נחתכים.

אילו $Bm \parallel Cn$ היו נוצרות זוויות חד-צדדיות C_1 ו- B_1 בין המקבילים הנ"ל והחיתוך BC, ואז: $\angle B_1 + \angle C_1 = 180^\circ$ וזה לא יתכן $\Leftarrow Bm$ ו- Cn נחתכים ב-0.



שלב ב'

בי"ע: $OR \perp BC$, $OS \perp AC$, $OP \perp AB$
לפי שלב א' נמצאת הנקודה O על חוצה הזווית B.

$$OP = OR \quad (1) \Leftarrow$$

O מונחת גם על חוצה הזווית C.

$$OS = OR \quad (2) \Leftarrow \text{(ע"ס 1 ו-2)}.$$

$$OS = OP \Leftarrow$$

$$OA \Leftarrow \text{חוצה-זווית A (לפי 2.2)}.$$

מסקנה:

קבלנו שלוש נקודות P, S, R הנמצאות במרוחקים שווים מנקודה O .
פרוש הדבר, ש- O היא מרכז של מעגל שעובר דרך הנקודות P, S, R או
מרכז המעגל החסום במשולש.

3. תיכונים, מרכז הכובד של המשולש

3.1 משפט:



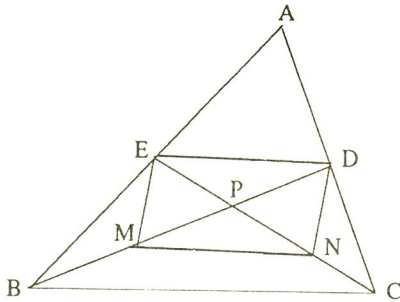
כל שני תיכונים במשולש נחתכים.

ההוכחה דומה להוכחה על חוצי-זוויות. הוכח!

3.2 משפט:



כל שני תיכונים במשולש חותכים זה את זה, ביחס של 1:2,
כשהחלק הגדול מבין השניים סמוך לקודקוד.



נתון	משולש ABC $BE = AE$ $DA = DC$ P נקודת מפגש של BD ו-CE.
צ"ל	$BP = 2PD$ (או $BP = \frac{2BD}{3}$; $PD = \frac{BD}{3}$) $CP = 2PE$
הוכחה	ב"ע: $\left. \begin{array}{l} BM = MP \\ CN = NP \end{array} \right\}$ $E-D, D-N, M-N, E-M$ במשולש ABC, ED קטע אמצעים (לפי נתון), לכן: $ED \parallel BC$; $ED = \frac{BC}{2}$ (1) $\leftarrow$

ב - $\triangle PBC$, MN קטע אמצעים, לפני בי"ע לכן:

$$MN \parallel BC, MN = \frac{BC}{2} \quad (2) \Leftarrow$$

$$\{ \text{(לפי (1) ו-(2))} \} MN \parallel ED \Leftarrow$$

$$MEDN \text{ מקבילית. נמק!} \Leftarrow$$

$$MP = PD \quad (3) \Leftarrow$$

$$NP = PE \quad (4)$$

$$BP = 2PD \text{ או } \{ \text{(ע"ס בי"ע ו-(3))} \} BM = MP = DP = \frac{BD}{3} \Leftarrow$$

$$CP = 2PE \text{ או } \{ \text{(ע"ס בי"ע ו-(3))} \} CN = NP = PE = \frac{CE}{3} \Leftarrow$$

מ.ש.ל.

3.3 משפט:



שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת.

ההוכחה - לפי 3.2: כל שני תיכונים מחלקים זה את זה, ביחס של 1:2, כשהחלק הגדול סמוך לקודקוד. היות שלכל קטע, יש רק נקודה אחת, שיכולה לחלק אותו, באותו יחס ובאותו סדר, משמעות הדבר, שהנקודה הזו משותפת לשלושת התיכונים.

3.4 נקודת מפגש התיכונים היא מרכז הכובד של המשולש.

אם מניחים מישור, בצורת משולש, על נקודת אחיזה, התומכת בו, במקום מפגש התיכונים, ישאר המשולש במצב מאוזן (לא יטה לשום צד).

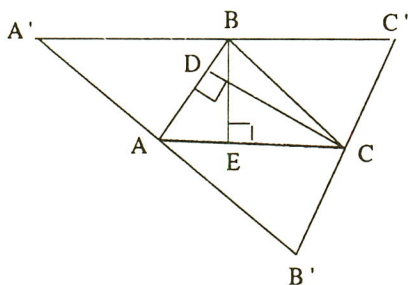
הסבר

4. הנקודה המצויינת הרביעית

משפט:



שלושת הגבהים במשולש נפגשים בנקודה אחת.



הוכחת משפט זה מסתמכת על המשפט בדבר מפגש האנכים האמצעים במשולש.

בנית עזר: דרך קדקודי המשולש ABC מעבירים מקבילים לצלעותיו. מתקבל משולש $A'B'C'$ (נמק מדוע המקבילים לצלעות חייבים להיפגש).

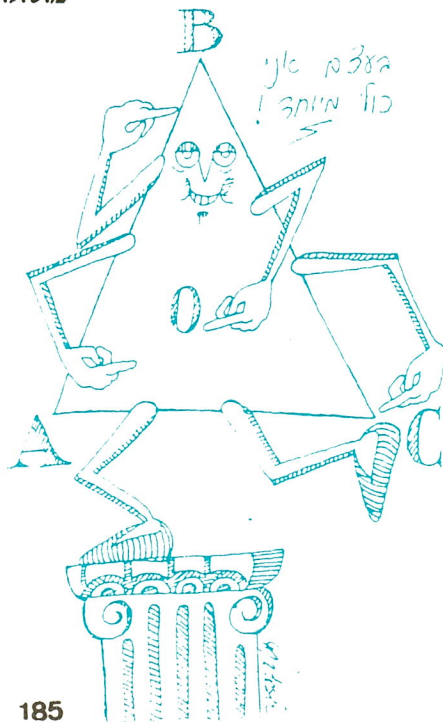
טענה: גבהי המשולש ABC הם אנכים אמצעיים לצלעות המשולש $A'B'C'$.

נמק טענה זו ביחס לגובה BE:

- (1) אם $BE \perp AC$ ובנינו $A'C' \parallel AC$ מתקבל $BE \perp A'C'$.
- (2) המרובעים $ABC'A'$ ו- $BCA'C'$ מקביליות, לפי ב"ע. מכאן נובע: $AB = BC'$ מ (1) ומ (2) נובע ש- BE אנך אמצעי לצלע $A'C'$

מסקנה: אם גבהי משולש ABC הם אנכים אמצעיים במשולש ABC, אזי (ע"ס המשפט בסעיף 1.3) שלושתם נפגשים בנקודה אחת.

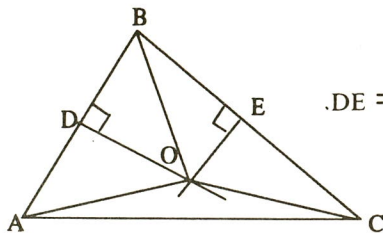
מ.ש.ל.



תרגילים

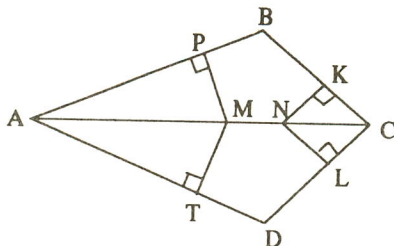
1. שרטט משולש ישר זווית ושרטט בו את:
א - האנכים האמצעיים ב - את הגבהים.

2. חזור על התרגיל הקודם כאשר המשולש הוא קהה-זווית.

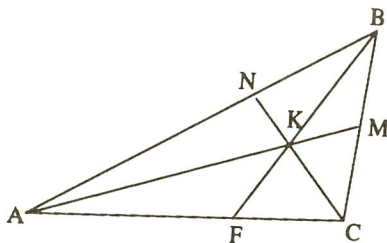


3. DO ו-EO אנכים אמצעיים לצלעות AB ו-BC, בהתאמה. $BO = 10$ ס"מ, $DE = 8$ ס"מ. חשב את היקף המשולש AOC.

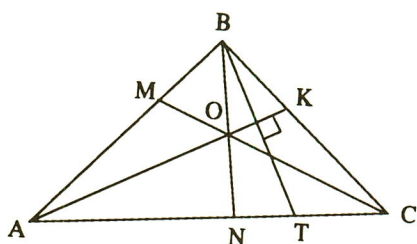
4. DO ו-EO אנכים אמצעיים במשולש ABC (השרטוט כמו בתרגיל הקודם), נתון $\angle AOC = 110^\circ$. חשב את הזווית OAC.



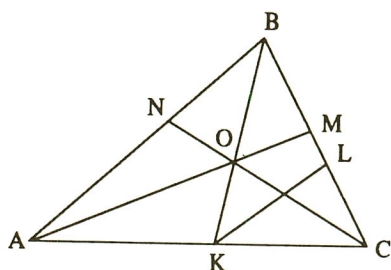
5. ABCD דלתון (A ו-C קודקדי הראש), M ו-N נקודות על AC, $MP \perp AB$, $NL \perp DC$, $NK \perp BC$, $MT \perp AD$. הוכח: א - $MP = MT$ ב - $NK = NL$



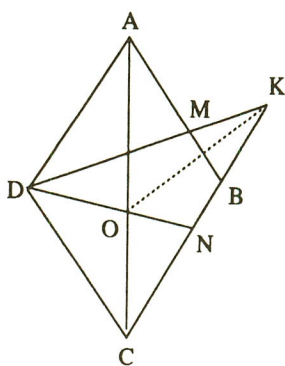
6. AM ו-CN חוצי זוויות במשולש ABC, הנחתכים בנקודה K. $\angle C = 96^\circ$, $\angle A = 50^\circ$. חשב את הזווית BKC.



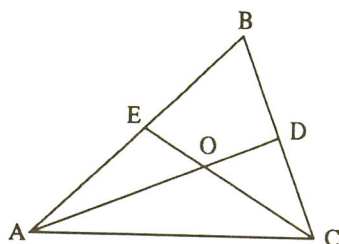
7. הנחתים BN ו- CM חוצי זוויות במשולש ABC ,
נתון: $BT \perp AK$.
הוכח: $AB + CT = AC$.



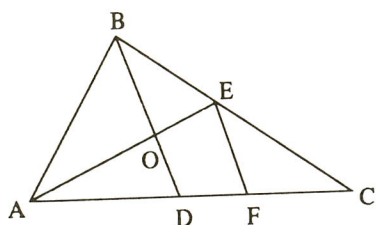
8. הנחתים AM ו- CN חוצי זוויות במשולש ABC .
 $KL \parallel AN$. K -ב- AC חותך את BO .
הוכח: $BL = LK$.



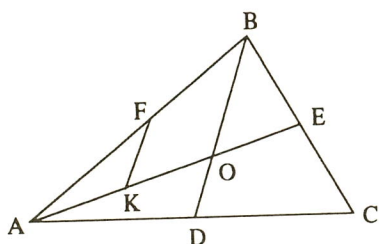
- 9*. $ABCD$ מעוין. DM ו- DN מחלקים את
 $\angle ADC$ ל-3 זוויות שוות.
הוכח; OK חוצה את הזווית K .



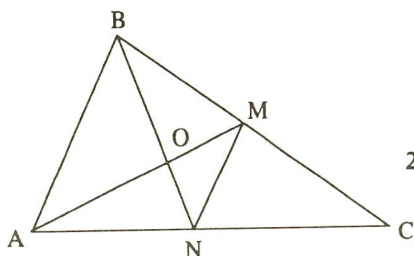
10. AD ו- CE תיכונים במשולש ABC ,
הנחתים בנקודה O .
נתון: $AD = 12$ ס"מ, $CO = 6$ ס"מ.
חשב את OE , AO , OD ו- CE .



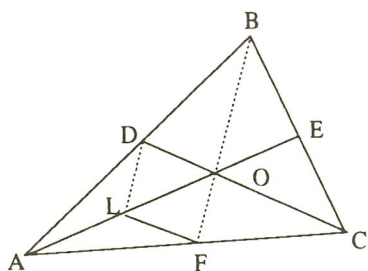
11. AE ו-BD תיכונים במשולש ABC.
נתון: $EF \parallel BD$, $EF = 3$ ס"מ.
חשב את BO.



12. BD ו-AE תיכונים במשולש ABC.
נתון $KF \parallel BD$, $AK = KO$,
 $EO = 5$ ס"מ, $FK = 3$ ס"מ.
חשב את AE ו-BD.

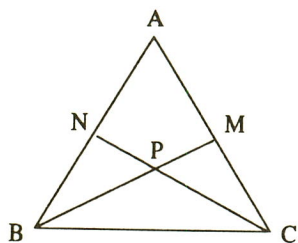


13. MN קטע אמצעים במשולש ABC.
הוכח כי היקף המשולש ABO גדול פי 2
מהיקף המשולש MON.

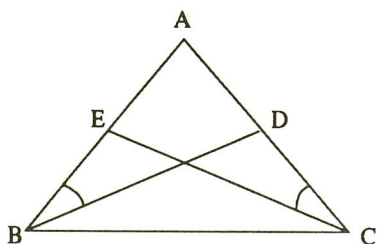


- 14*. AE ו-CD תיכונים במשולש ABC.
L אמצע AO, $LF \parallel OC$.
הוכח:
א - LDOF מקבילית.
ב - $\angle BOF = 180^\circ$.

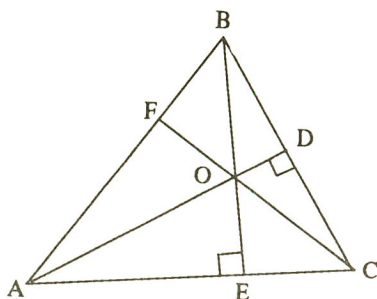




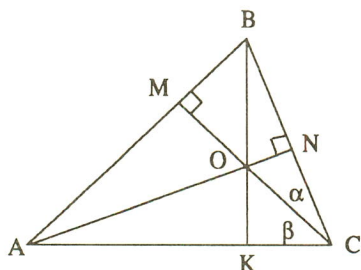
15. נתון משולש ABC, ובו שני תיכונים BM ו-CN שווים זה לזה.
 הוכח: $AB=AC$.
 (רמז: הוכח קודם $PB=PC$).



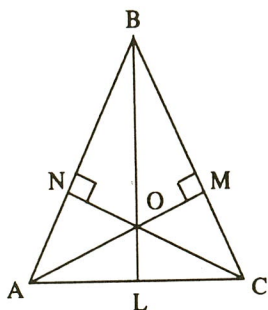
16. הוכח: אם במשולש ABC, שני התיכונים BD ו-CE שווים זה לזה, הרי $\angle ABD = \angle ACE$.



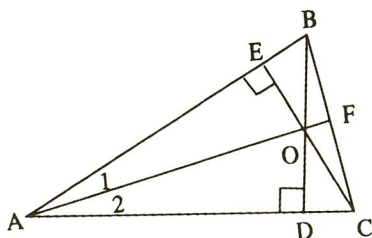
17. AD ו-BE גבהים במשולש ABC, $\angle ACO = 45^\circ$.
 הוכח: $BF=FO$.



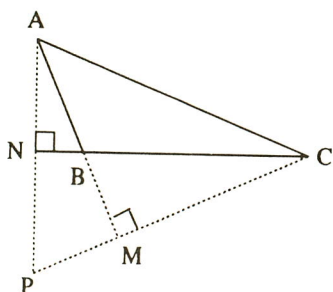
- 18*. AN ו-CM גבהים במשולש ABC, $\alpha:\beta=2:3$, $\angle C=75^\circ$
 $MO = 6$ ס"מ, $AM = 10$ ס"מ
 א - חשב את ON.
 ב - הוכח: $AK=BK$.



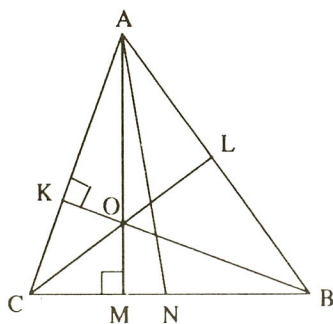
19. AM ו-CN גבהים במשולש ABC.
נתון: $AO=CO$ - BOL - קו ישר.
הוכח: א - OL תיכון במשולש AOC.
ב - $\triangle ABC$ משולש שוו"ש.



20. BD ו-CE גבהים במשולש ABC.
AO חותך את BC ב-F, $BF=FC$.
הוכח: א - $\triangle BOC$ משולש שוו"ש.
ב - $\angle A_1 = \angle A_2$



21. שני הגבהים AM ו-CN במשולש
קה-הזווית ABC נפגשים בנקודה P.
הוכח כי הנקודה B, היא נקודת המפגש
של שלושת גבהי המשולש APC.

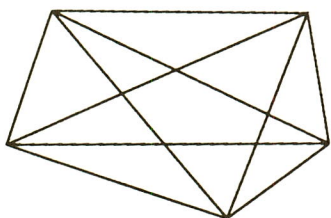


- 22*. AM ו-AN הם הגובה והתיכון
(בהתאמה) לצלע a במשולש ABC.
BK גובה לצלע b, L נקודת
החיתוך של CO עם AB.
הוכח: $KN=NL$.

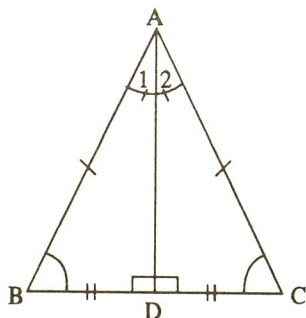
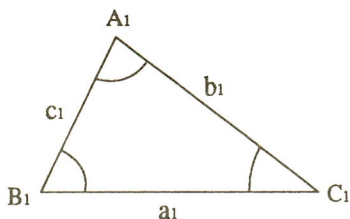
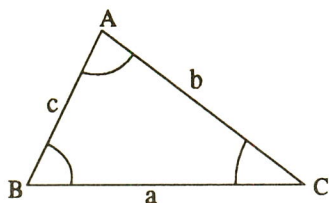
תשובות

36 (3 ; 4 ; 35° ; 6 ; 115° ; 10 ; 4 , 8 , 3 , 9 ; 11 (4 ;
12 (15 , 9 ; 18 ; 2

נוסחאות, משפטים ובעיות חשובות



- מספר האלכסונים היוצאים מקודקוד אחד, של מצולע בעל n צלעות, הוא $n-3$, ומספר האלכסונים הכולל של המצולע הוא $\frac{n(n-3)}{2}$.



שני משולשים חופפים -

$\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$ - כאשר הם שווים ב:

I - שתי צלעות והזווית הכלואה

ביניהן (צ.ז.צ.):

$$\angle C = \angle C_1, b = b_1, a = a_1$$

II - צלע ושתי הזוויות שלידה (ז.צ.ז.):

$$\angle C = \angle C_1, \angle B = \angle B_1, a = a_1$$

III - שלוש צלעות (צ.צ.צ.):

$$c = c_1, b = b_1, a = a_1$$

IV - שתי צלעות והזווית המונחת

מול הצלע הגדולה (מבין השתיים)

$$a > b, \angle B = \angle B_1, b = b_1, a = a_1$$

V - צלע, זווית שלידה וזווית שממולה:

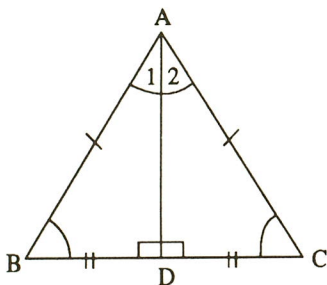
$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, a = a_1$$

● במשולש שוו"ש, זוויות הבסיס שוות זו לזו.

חוצה-זווית הראש במשולש שוו"ש, הוא גם תיכון לבסיס, גם גובה ולכן גם אנך אמצעי.

כלומר, אם $\angle A_1 = \angle A_2$, $AB = AC$

אזי: $\angle B = \angle C$, $AD \perp BC$, $BD = CD$.



אם במשולש מתקיים:

א. אחד התיכונים הוא גם גובה

או

ב. אחד מחוצי-הזוויות הוא גם

גובה.

אזי המשולש הוא שווה-שוקיים,

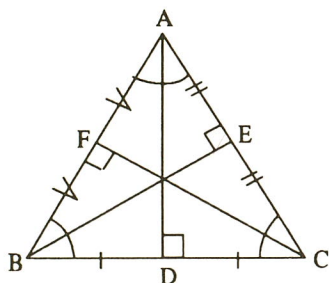
כלומר:

א. אם $AD \perp BC$, $BD = CD$;

$AB = AC \Leftarrow$

ב. אם $\angle A_1 = \angle A_2$ ו- $AD \perp BC$

$AB = AC \Leftarrow$



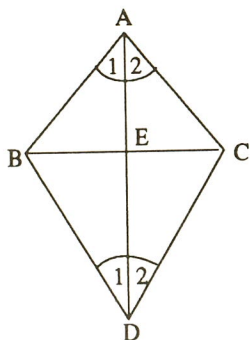
במשולש שווה-צלעות, כל חוצה זווית

הוא גם תיכון, גם גובה ולכן גם אנך

אמצעי.

במשולש שווה-צלעות, כל הזוויות

שוות זו לזו.



האלכסון הראשי **בדלתון** חוצה את

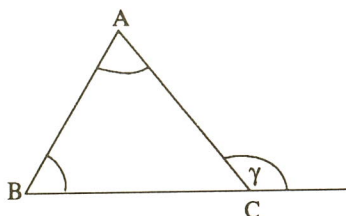
זוויות הראש, חוצה את הבסיס

המשותף ומאונך לו, כלומר:

אם $DB = CD$, $AB = AC$

$\angle D_1 = \angle D_2$, $\angle A_1 = \angle A_2 \Leftarrow$

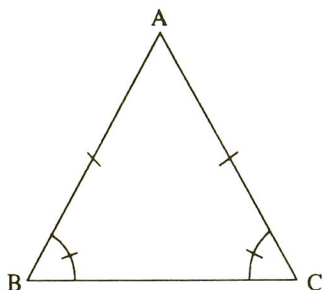
$AD \perp BC$, $BE = CE$



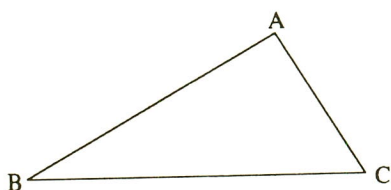
זווית חיצונית למשולש גדולה מכל

זווית פנימית שאינה צמודה לה.

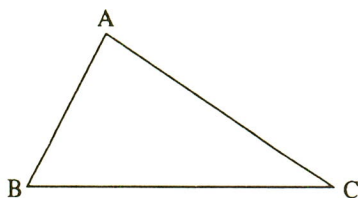
$\angle B > \angle A$



- במשולש אחד או במשולשים חופפים:
א. מול צלעות שוות מונחות זוויות
שוות; ב. מול זוויות שוות מונחות
צלעות שוות, כלומר:
 $\angle C = \angle B \Leftrightarrow AB = AC$

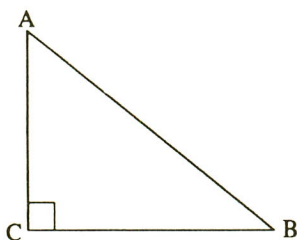


- במשולש אחד (או במשולשים חופפים)
מול הצלע הגדולה מונחת הזווית
הגדולה; וההפך - מול הזווית הגדולה
מונחת הצלע הגדולה, כלומר:
 $\angle C > \angle B \Leftrightarrow AB > AC$

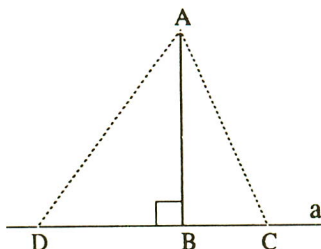


- סכום שתי צלעות במשולש גדול
מהצלע השלישית
 $AB + AC > BC$

- הפרש שתי צלעות במשולש קטן
מהצלע השלישית:
 $BC - AB < AC$



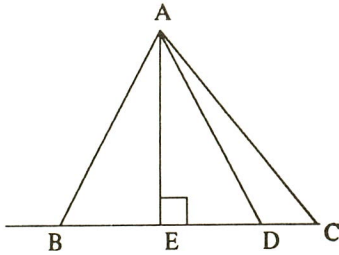
- במשולש ישר-זווית:
א. שתי הזוויות האחרות הן חדות;
ב. היתר גדול מכל ניצב, כלומר:
אם $\angle C = 90^\circ$, אז
א. $\angle B < 90^\circ$, $\angle A < 90^\circ$.
ב. $AB > BC$, $AB > AC$.



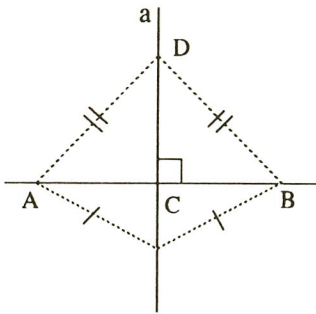
- המרחק הקצר ביותר מנקודה לישר,
הוא האנך מהנקודה לישר, כלומר:
אם $AB \perp a$; $AB < AD$; $AB < AC$

● אם שני משופעים יוצאים מנקודה אחת לישר, אזי:

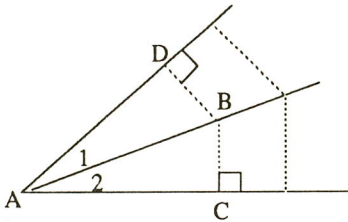
א. למשופעים שווים, שייכים הטלים שווים - וההפך, אם שני הטלים שווים, אזי גם המשופעים שווים.
 $BE = DE \Leftrightarrow AB = AD$



ב. אם המשופעים שונים, אז למשופע הגדול - ההטל הגדול; וההפך, ההטל הגדול שייך למשופע הגדול:
 $CE > BE \Leftrightarrow AC > AB$

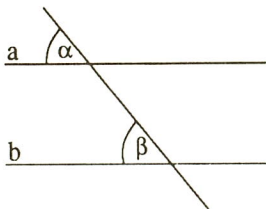


● האנך האמצעי של קטע הוא המקום הגאומטרי, של כל הנקודות, שמרחקיהן מקצות הקטע שווים זה לזה:
 אם $DA = DB \Leftrightarrow \angle C = 90^\circ, AC = BC$ (לכל נקודה D על האנך האמצעי a).

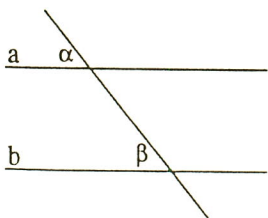


● חוצה-זווית הוא המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שרוחקיהן משוקי הזווית שווים זה לזה:
 אם $BC \perp AC, AD \perp BD, \angle A_1 = \angle A_2$ (לכל נקודה B על חוצה הזווית).
 $BD = BC \Leftrightarrow$

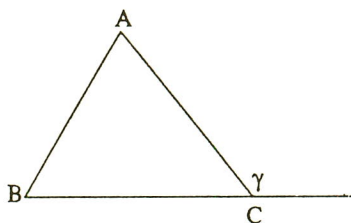
● אכסיומת המקבילים: דרך נקודה שמחוץ לישר, אפשר לבנות לישר מקביל אחד בלבד.



● אם שתי זוויות מתאימות שוות זו לזו, או שתי זוויות מתחלפות שוות, או שתי זוויות חד-צדדיות משלימות ל- 180° , אזי הישרים מקבילים:
 אם $a \parallel b \Leftrightarrow \alpha = \beta$

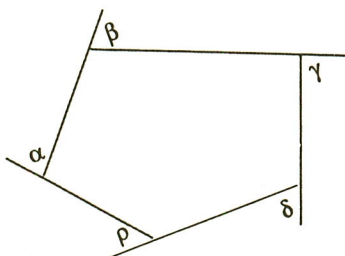


- אם שני ישרים מקבילים זה לזה, אז הזוויות המתאימות שוות זו לזו, הזוויות המתחלפות שוות זו לזו, והזוויות החד-צדדיות משלימות זו את זו ל- 180° :
 $\alpha = \beta \Leftarrow a \parallel b$

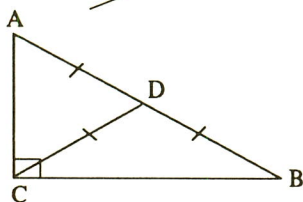


- זווית חיצונית למשולש, שווה לסכום הזוויות הפנימיות, שאינן צמודות לה:
 $\gamma = \angle A + \angle B$

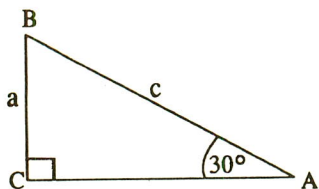
- סכום הזוויות במשולש - 180° :
 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$
 סכום הזוויות במצולע בעל n צלעות שווה: $180^\circ (n-2)$



- סכום הזוויות החיצוניות במצולע קמור אינו תלוי במספר צלעותיו ושווה תמיד ל- 360° .
 $\alpha + \beta + \gamma + \delta + p = 360^\circ$

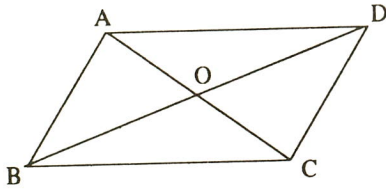


- במשולש ישר-זווית, התיכון ליתר שווה למחצית היתר, כלומר
 אם: $AD = DB, \angle C = 90^\circ$
 $AB = 2 \cdot DC \Leftarrow$



- אם במשולש ישר-זווית, יש זווית בת 30° , אזי הניצב שמול הזווית הזו שווה למחצית היתר, כלומר,
 אם: $\angle A = 30^\circ, \angle C = 90^\circ$
 $c = 2a \Leftarrow$

במקבילית:



- א. הזוויות הנגדיות שוות זו לזו והסמוכות משלימות זו את זו ל- 180° .
- ב. הצלעות הנגדיות שוות זו לזו.
- ג. האלכסונים חוצים זה את זה, כלומר אם: $AD \parallel BC, AB \parallel CD$, אז:
 - א. $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D, \angle A + \angle B = 180^\circ$.
 - ב. $AD = BC, AB = CD$.
 - ג. $BO = DO, AO = CO$.

מרובע הוא מקבילית, אם מתקיים אחד מהתנאים הבאים:

- א. כל שתי צלעות נגדיות מקבילות זו לזו (הגדרה).
- ב. כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.
- ג. זוג אחד של צלעות נגדיות מקבילות ושוות.
- ד. הזוויות הנגדיות שוות, או הזוויות הסמוכות משלימות זו את זו ל- 180° , או זוג זוויות נגדיות שוות וזוג זוויות סמוכות משלימות זו את זו ל- 180° .
- ה. האלכסונים חוצים זה את זה.

מקרים מיוחדים של מקבילית: מלבן, מעוין, ריבוע.

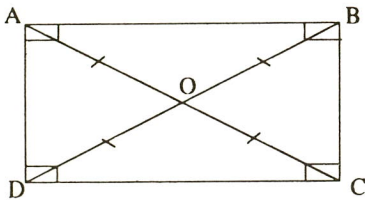
למלבן שייכות כל תכונות המקבילית

ונוסף לזה:

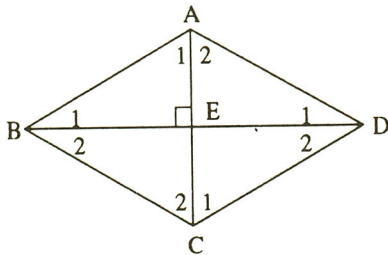
- א. כל זוויותיו ישרות;
- ב. אלכסוניו שווים זה לזה.
- כלומר אם: ABCD מלבן, אז:

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$$

$$AC = BD$$



- מרובע הוא מלבן, אם הוא מקבילית ואם מתקיים אחד מהתנאים הבאים:
א. יש לו זווית ישרה (הגדרה).
ב. אלכסונו שווים זה לזה.



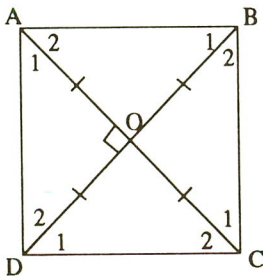
- למעוין שייכות כל תכונות המקבילית ונוסף לזה:

- א. כל הצלעות שוות זו לזו.
- ב. אלכסונו מאונכים זה לזה.
- ג. אלכסונו חוצים את זוויותיו:
אם ABCD מעוין, אז:
 $AC \perp BD$, $AB = BC = CD = AD$
 $\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$
 $\angle C_1 = \angle C_2$, $\angle D_1 = \angle D_2$

- מקבילית היא מעוין, אם מתקיים אחד מהתנאים הבאים:
א - שתי צלעות סמוכות שוות זו לזו (הגדרה)
ב - האלכסונים מאונכים זה לזה
ג - אחד האלכסונים חוצה את אחת מהזוויות.

- בריבוע מתקיימות כל תכונות המעוין והמלבן גם יחד:

- א. כל צלעותיו שוות (הגדרה).
- ב. כל זוויותיו ישרות (הגדרה).
- ג. אלכסונו שווים זה לזה, חוצים זה את זה, מאונכים זה לזה וחוצים את זוויות הריבוע:



- $AB = BC = CD = AD$
- $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$
- $AC = BD$, $AC \perp BD$
- $AO = CO = BO = DO$
- $\angle C_1 = \angle C_2$, $\angle D_1 = \angle D_2$
- $\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$

בטרפז שווה-שוקיים

א. הזוויות המונחות על בסיס אחד שוות זו לזו.

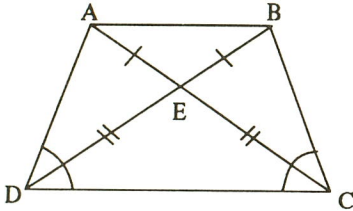
ב. אלכסונו שווים זה לזה.

ג. האלכסונים חותכים זה את זה, באופן כזה שהקטעים הקרובים לכל בסיס שווים זה לזה:

אם $AD = BC$, $AB \parallel CD$

$\angle C = \angle D$, $\angle A = \angle B$

$CE = DE$, $AE = BE$, $AC = BD$



אם בטרפז מתקיים אחד מהתנאים

הבאים, אזי הטרפז שווה-שוקיים:

א. $\angle C = \angle D$ או $\angle A = \angle B$

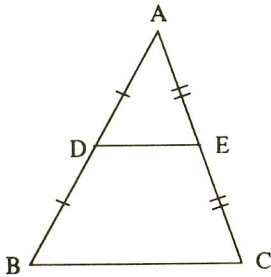
ב. $AC = BD$

קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע

השלישית ושווה לחציה:

אם $AE = EC$, $AD = DB$

$DE = \frac{1}{2}BC$, $DE \parallel BC$



קטע היוצא מאמצע צלע אחת, של

משולש ומקביל לצלע השנייה, חוצה

את הצלע השלישית.

אם $DE \parallel BC$, $AD = DB$

$AE = EC$

אם ישר, המחבר שתי צלעות במשולש,

מקביל לצלע השלישית ושווה לחציה,

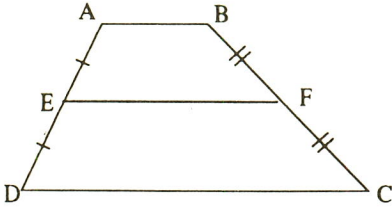
הרי הוא קטע אמצעים.

אם $DE = \frac{1}{2}BC$, $DE \parallel BC$

$AD = DB$, $AE = EC$

- קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.

אם $BF = FC$, $AE = ED$, $AB \parallel CD$, $EF \parallel AB$
 $FE = \frac{1}{2} (AB + CD)$

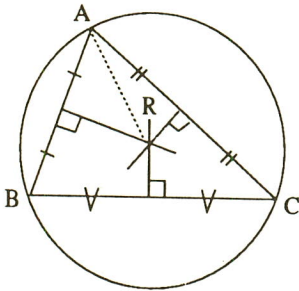


- קטע היוצא מאמצע שוק אחת של טרפז ומקביל לבסיסים, חוצה גם את השוק השניה.

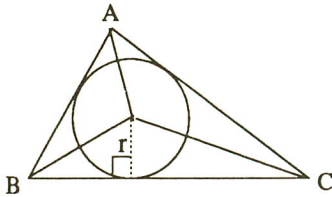
אם $EF \parallel AB$, $AE = ED$, $AB \parallel CD$
 $BF = FC \Leftarrow$

נקודות מיוחדות במשולש

- שלושת האנכים האמצעיים במשולש נפגשים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל, החוסם את המשולש.

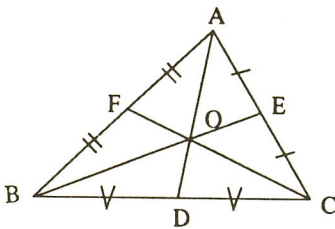


- שלושת חוצי-הזוויות במשולש נפגשים בנקודה אחת שהיא מרכז המעגל החסום במשולש.

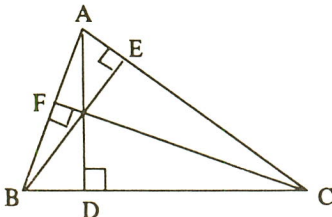


- התיכונים במשולש מחלקים זה את זה ביחס של 2:1 כאשר החלק הגדול, קרוב לקודקוד,

כלומר אם BE ו-AD תיכונים אזי
 $AO = 2DO$



- שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת, שהיא מרכז הכובד של המשולש.



- שלושת הגבהים במשולש נפגשים בנקודה אחת.

רשימת סמלים וקיצורים

$\sphericalangle A$	זווית A
$\sphericalangle$	חוצה-זווית
$\sphericalangle C = 90^\circ$	זווית C ישרה
α	אלפא
β	בטא
γ	גמא
δ	דלתא
$\in$	אפסילון
ha	גובה לצלע a
m_c	תיכון לצלע c
l_b	חוצה זווית B
$c \perp b$	c מאונך ל-b
A - B	מחברים B ל-A
$a \parallel b$	a מקביל ל-b
$\triangle ABC$	משולש ABC
$\cong$	סמל לחפיפת משולשים
	משפט חפיפה ראשון או
..... מ.ח. I או צ.ז.ז.	"צלע, זווית, צלע"
	משפט חפיפה שני או
..... מ.ח. II או ז.צ.ז.	"זווית, צלע, זווית"
	משפט חפיפה שלישי או
..... מ.ח. III או צ.צ.צ.	"צלע, צלע, צלע"
$\Leftarrow$	מכאן נובע, מסקנה
צ"ל	צריך להוכיח
	חלקים מתאימים במשולשים
(ח.מ.ב.ח.)	חופפים
ב"ע	בנית עזר
שו"ש	שווה-שוקיים
שו"צ	שווה-צלעות
י.ז.	ישר-זווית
מ.ש.ל.	מה שהיה צריך להוכיח