

יפה בר אור



הנדסת המישור חלק ב'

לחטיבת הביניים ולחטיבה העליונה

יפה בר-אור

הנדסת המישור

חלק ב

לחטיבת הביניים ולחטיבה העליונה

יעוץ מדעי
ד"ר א. קליין
מאוניברסיטת בר-אילן

יעוץ פדגוגי
ד"ר ש. בר-אור

עריכה גרפית
אור וצל הפקות דפוס בע"מ

עיצוב עטיפה
הפיל הורוד

איורים
מירי לשם

תודתי נתונה
לעמיתותי לעבודה ברנינג קלרה וקנטור סופיה
על הערותיהן המועילות.

© כל הזכויות שמורות למחברת

1993

תוכן העניינים

פרק א. מקומות גיאומטריים

עמוד

1. אנך אמצעי 7
2. מקבילים 8
3. חוצה-זווית 9
4. מעגל 10
- תרגילים 11

פרק ב. המעגל

קשתות וישרים במעגל

1. הגדרת מושגים 12
2. מצב יחסי של ישר ומעגל 13
3. זווית מרכזית, קשת, מיתר 13
4. מיתר ורוחקו מהמרכז 15
5. המשיק 19
- תרגילים 23

זוויות במעגל

6. מיון זוויות 37
7. זווית היקפית 38
8. זווית פנימית 42
9. זווית חיצונית 42
10. זווית בין משיק ומיתר 43
11. זווית בין משיק וחוטך 45
12. זווית ראייה של מעגל 45
13. מצב יחסי של שני מעגלים 46
- תרגילים 50

מעגל חוסם ומעגל חסום

14. מרובע מיתרים 71
15. מרובע משיקים 73
16. מצולעים משוכללים ומעגל 74
- תרגילים 77

פרק ג. שטחים

90	1. המלבן והריבוע
92	2. המקבילית
93	3. המשולש
96	4. הטרפז
97	5. המצולע
97	6. דוגמאות
99	תרגילים

פרק ד. משפט פיתגורס

110	1. משפט אויקלידס
111	2. משפט פיתגורס
112	3. דוגמאות
114	4. הרחבת משפט פיתגורס
115	5. נוסחת הירון
116	6. חישובים במעגל
118	תרגילים

פרק ה. פרופורציה

130	1. פרופורציה בין מספרים
132	2. פרופורציה בין קטעים
140	3. תכונות חוצה-זווית במשולש
144	תרגילים

פרק ו. דמיון משולשים ומצולעים

160	1. דמיון משולשים
161	2. משפטי הדמיון
166	3. תכונות של משולשים דומים
170	4. קטעים פרופורציוניים במשולש ישר-זווית
172	5. קטעים פרופורציוניים במעגל
173	6. מצולעים דומים
176	תרגילים

משפטים, נוסחאות ומסקנות חשובות בהנדסת המישור

רשימת סמלים וקיצורים

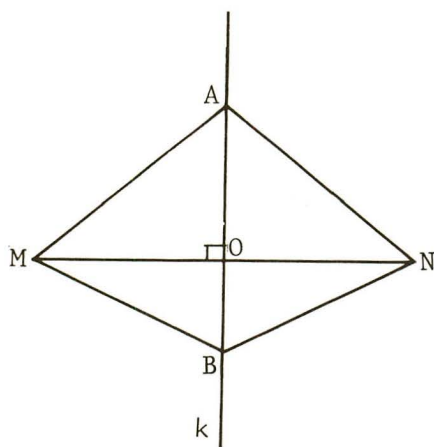
פרק א: מקומות גיאומטריים

מקום גיאומטרי מוגדר כצורה הנדסית, שלכל נקודותיה, ורק להן, תכונה משותפת.
נבחן מספר דוגמאות חשובות של מקומות גיאומטריים.

1. אנך אמצעי

נחזור לשני משפטים, המציגים תכונות של האנך האמצעי:

- * כל נקודה, על האנך האמצעי לקטע, נמצאת ברוחקים שווים מקצות הקטע.
- * אם נקודה נמצאת ברוחקים שווים מקצות קטע, הרי היא נמצאת על האנך האמצעי של אותו קטע.



בשרטוט שלפנינו: אם הנקודות A,B
נמצאות על האנך האמצעי k, של
הקטע MN, הרי $AM = AN$ ו- $BM = BN$
ולחיפ: אם הנקודה A, נמצאת ברוחקים
שווים מקצות הקטע MN, הרי האנך,
היורד מהנקודה A לקטע MN חוצה אותו;
כלומר k הוא האנך האמצעי של הקטע.

ניתן להראות גם את הטענה הבאה:

אם נקודה אינה נמצאת על האנך האמצעי לקטע, רוחקיה מקצות הקטע, שונים.

מכל האמור לעיל, מתקבלת המסקנה הבאה:

מסקנה

האנך האמצעי לקטע הוא המקום הגיאומטרי, של כל הנקודות, שרוחקיהן מקצות
הקטע שווים זה לזה.

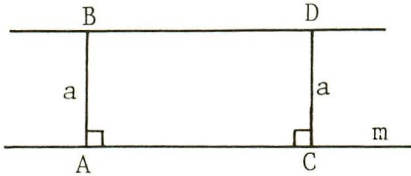
2. מקבילים

משפט



נקודות, הנמצאות ברוחקים שווים מישר נתון, ומאותו צד שלו, מונחות על מקביל לישר הנתון.

ה/כח



רוחקי הנקודות B ו- D מהישר m שווים זה לזה, וכן $AB \parallel CD$ כי שניהם מאונכים לישר m. לכן, המרובע ABDC מלבן. לכן: $BD \parallel m$.

משפט (הפוך)

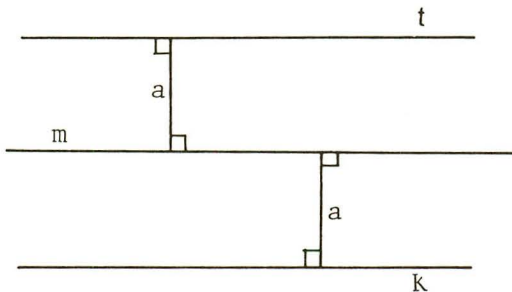


כל הנקודות, המונחות על ישר מקביל לישר נתון, נמצאות באותו רוחק מהישר הנתון. הוכח!

משני המשפטים הנ"ל מתקבלות המסקנות הבאות

מסקנה א

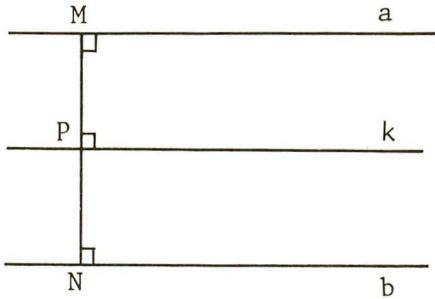
המקום הגיאומטרי של כל הנקודות, הנמצאות ברוחקים שווים מישר נתון, אלה שני ישרים מקבילים לישר הנתון, משני צידיו ובאותו רוחק ממנו.



הישרים t ו- k מהווים את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות, שרוחקהן מהישר הנתון m שווים ל- a.

מסקנה ב

המקום הגיאומטרי של כל הנקודות, הנמצאות ברוחקים שווים משני ישרים מקבילים, הוא האנך האמצעי לקטע, המאונך לשני הישרים הנתונים.

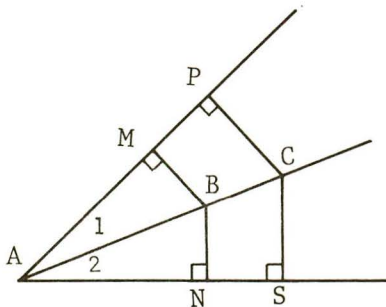


הסבר נניח $a \parallel b$. מורידים אנך ל- a בנקודה כלשהי M . אנך זה חותך את b בנקודה N . הישר k , שהוא האנך האמצעי של הקטע MN , הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות, הנמצאות ברוחקים שווים מהישרים a ו- b .

3. חוצה - זווית

נחזור לשני משפטים המציגים תכונות של חוצה-זווית:

- * כל נקודה על חוצה-זווית, נמצאת ברוחקים שווים משוקי הזווית.
- * אם לנקודה רוחקים שווים משוקי זווית, היא מונחת על החוצה של אותה זווית.



כלומר:

אם נקודה B נמצאת על חוצה-הזווית A , האנכים BM ו- BN שווים זה לזה; ולהיפך:

אם נקודה C נמצאת ברוחקים שווים משוקי הזווית ($CP = CS$), הקטע CA חוצה את הזווית A .

גם הטענה הבאה נכונה :

אם נקודה אינה נמצאת על חוצה זווית, רוחקיה משוקי הזווית שונים.

מכל האמור לעיל מתקבלת המסקנה הבאה :

מסקנה

חוצה-זווית הוא המקום הגיאומטרי, של כל הנקודות, שרוחקיהן משוקי הזווית שווים זה לזה.

4. מעגל

המעגל הוא קו עקום סגור, שכל נקודותיו נמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה.

המרחק הקבוע הוא רדיוס המעגל - R ;

הנקודה הקבועה - מרכז המעגל O .

רוחקיהן של הנקודות N, M, A

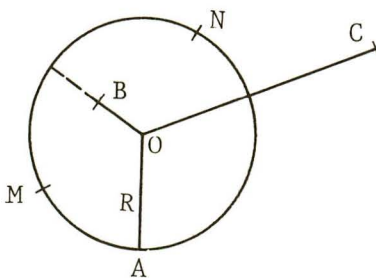
המונחות על המעגל, מהמרכז שווה

לרדיוס. לנקודות אחרות רוחק שונה

מהרדיוס.

לנקודות פנימיות כמו B : $OB < R$

ולנקודות חיצוניות כמו C : $OC > R$



מסקנה

המעגל הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות, שרוחקיהן מנקודה קבועה הוא גודל קבוע.

תרגילים

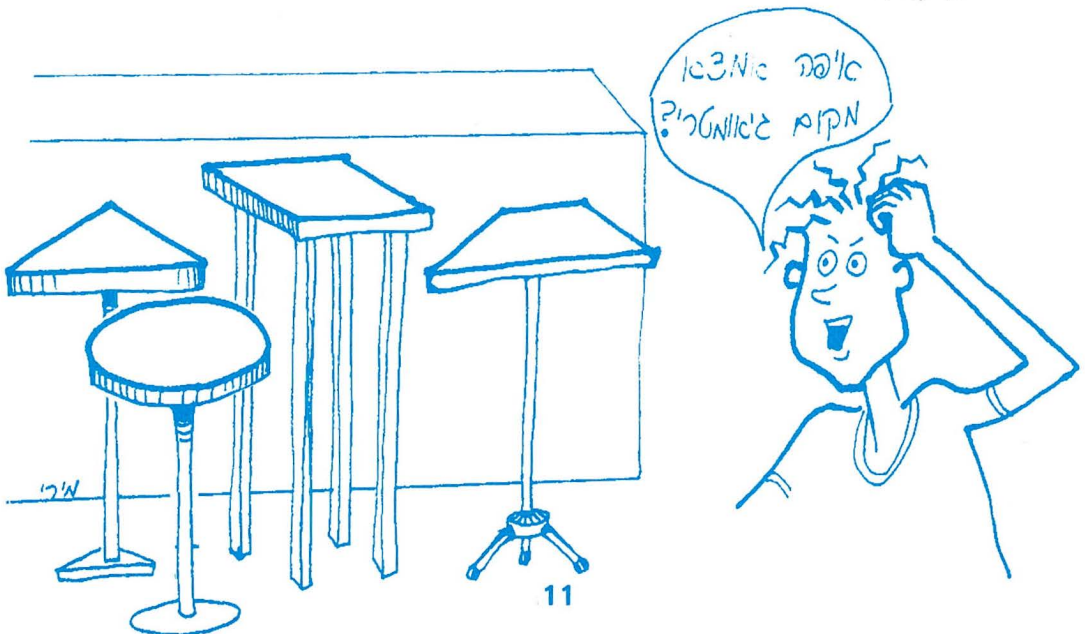
1. נתון ישר a ושתי נקודות M ו- N מחוץ לישר. האם קיימות נקודות על הישר a , שרוחקיהן מהנקודות M ו- N שווים זה לזה. סקור את כל המצבים היחסיים של M ו- N ביחס ל- a .

2. נתונים ישר a ונקודה M מחוץ לישר. מהו המקום הגיאומטרי של נקודות, שהן אמצעי הקטעים, המחברים את M לנקודות על הישר a .

3. נתונים שני ישרים מקבילים m ו- n , מהו המקום הגיאומטרי של אמצעי הקטעים, המחברים נקודה על m עם נקודה על n .

4. נתון מעגל O בעל רדיוס R . מהו המקום הגיאומטרי של נקודות, שרוחקיהן ממרכז המעגל שווים ל: $3R, R/2$.

5*. נתונה זווית ישרה וקטע שאורכו m . מהו המקום הגיאומטרי של נקודות, שבהן תימצא נקודת אמצע הקטע m , כאשר קצותיו מונחים על שוקי הזווית הישרה.

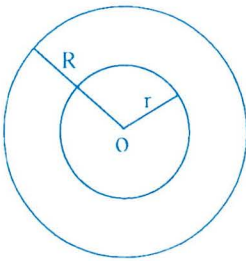


פרק ב: המעגל

קשתות וישרים במעגל

1. הגדרת מושגים

המעגל הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור, שרוחקיהן מנקודה קבועה הוא גודל קבוע.
הנקודה הקבועה היא **מרכז המעגל**, הרוחק הקבוע - הקטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה על המעגל הוא **רדיוס** או **המחוג**.
מעגלים בעלי מרכז משותף נקראים **מעגלים מרכזיים**.
מעגלים בעלי רדיוסים שווים הם **מעגלים שווים**.



מעגלים מרכזיים

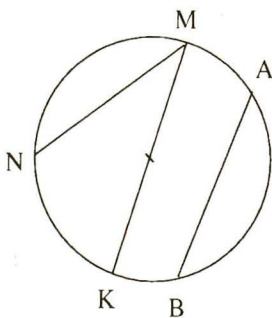
קשת - חלק המעגל הנמצא בין שתי נקודות.
סימונה: $\widehat{AB}$ או $\widehat{MN}$.

מיתר - קטע המחבר שתי נקודות על המעגל (קצות קשת).

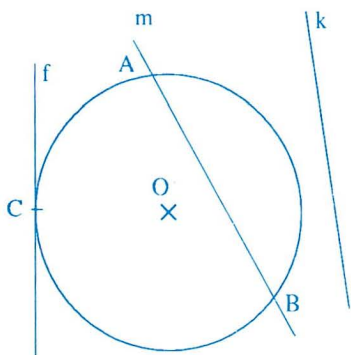
משתי ההגדרות הללו מתקבל, שלקשתות שוות מתאימים מיתרים שווים, ולהיפך: למיתרים שווים קשתות שוות (הכוונה לקשת הקטנה):

$$\widehat{AB} = \widehat{MN} \Leftrightarrow AB = MN$$

קוטר - מיתר שעובר דרך מרכז המעגל - למשל MK.



2. מצב יחסי של ישר ומעגל



קיימים שלושה מצבים יחסיים של ישר ומעגל:

- ישר **חותך** מעגל, כאשר למעגל ולישר שתי נקודות משותפות. הישר m חותך את המעגל O בנקודות A ו- B .
- ישר **משיק** למעגל, כאשר לישר ולמעגל נקודה משותפת אחת, זוהי נקודת ההשקה. יתר נקודות המשיק חיצוניות למעגל. הישר f משיק למעגל O בנקודה C .
- ישר **חיצוני** למעגל, כאשר למעגל ולישר אין נקודה משותפת. כל נקודות הישר חיצוניות למעגל. הישר k חיצוני למעגל O .

3. זווית מרכזית, קשת, מיתר

זווית מרכזית - היא זווית הנוצרת בין שני רדיוסים ולכן קודקודה במרכז המעגל.

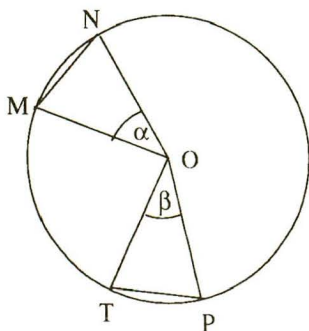
משפט:

במעגל אחד או במעגלים שווים, לזוויות מרכזיות שוות מתאימות קשתות שוות.

3.1



הסבר



הזוויות המרכזיות

α ו- β שוות זו לזו.

אם נניח את α על β

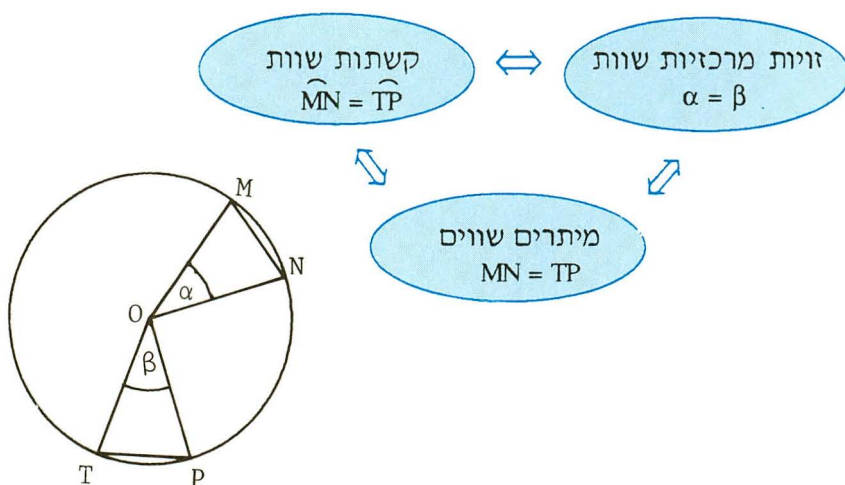
שוקיהן תתלכדנה.

לכן: $\widehat{MN} = \widehat{PT}$

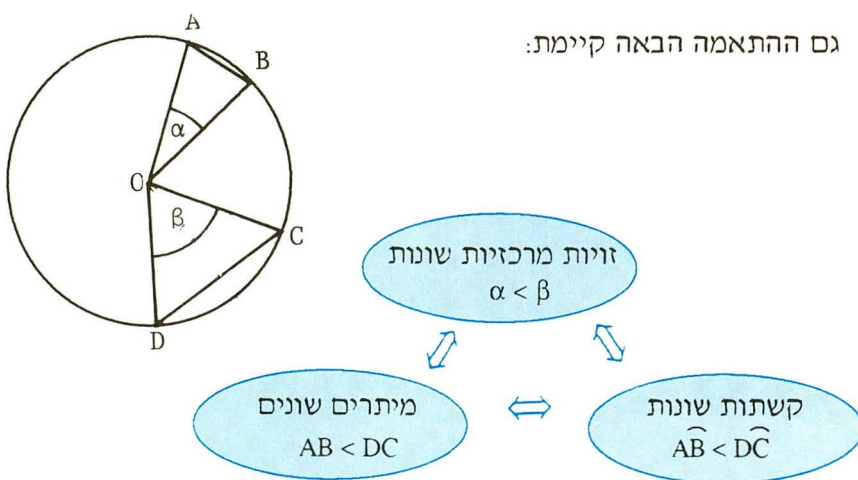
מסקנה

הקוטר מחלק את המעגל לשתי קשתות שוות זו לזו. נמק!

3.2 באופן כללי, קיימת התאמה משולשת בין זוויות מרכזיות, הקשתות המתאימות להן והמיתרים המתאימים:



3.3 גם ההתאמה הבאה קיימת:



3.4

אם זווית מרכזית היא בת k° , הקשת המתאימה לה אף היא בת k° . נהוג לומר **שזווית מרכזית שווה לקשת המתאימה לה**. כאשר שתיהן נמדדות באותה יחידת מידה. נשתמש בניסוח זה גם לגבי זוויות אחרות במעגל.

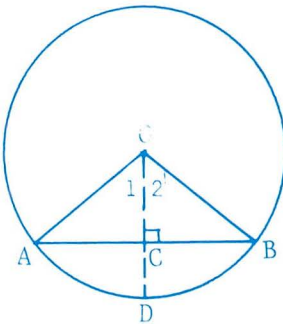


4. מיתר ורוחקו מהמרכז

4.1 המשפט החשוב הבא דן במיתר:

משפט

ישר, העובר דרך מרכז המעגל ומאונך למיתר, חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית ואת הקשת המתאימה למיתר.



נתון	מעגל O, מיתר AB $OD \perp AB$
צ"ל	$AC = CB$ $\angle O_1 = \angle O_2$ $\widehat{AD} = \widehat{DB}$
הוכחה	ב"ע : רדיוסים OA ו-OB $\triangle AOB$ - שוו"ש $AC = BC$ $\angle O_1 = \angle O_2$ (תכונות מש"ש) $\widehat{AD} = \widehat{DB}$ (לפי 3.1)

משפט (הפוך)

ישר, העובר דרך מרכז המעגל וחוצה את המיתר, מאונך למיתר זה.



הוכח:

הקטע OC נקרא **רוחק המיתר** AB ממרכז המעגל.

מסקנה

מרכז המעגל מונח על האנכים האמצעיים של כל מיתריו.

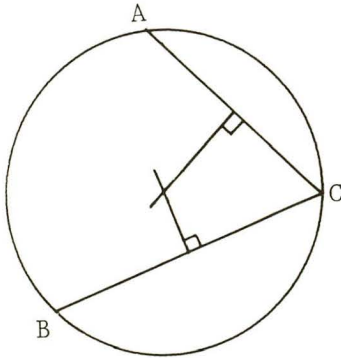
4.2 על סמך מסקנה זו מתקבל המשפט הבא :

משפט

דרך שלוש נקודות, שאינן מונחות על ישר אחד, עובר מעגל אחד ויחיד.



הוכחה



אם הנקודות A, B ו-C אינן נמצאות על ישר אחד, ניתן ליצור שני מיתרים AB ו-BC. נקודת המפגש של האנכים האמצעיים שלהם היא מרכז המעגל העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל והיא יחידה.

משפט (הפוך)

אם שלוש נקודות מונחות על מעגל אחד, אין קו ישר העובר דרכן. הוכח!



4.3 המשפטים הבאים מצביעים על הקשר בין אורך מיתר לרוחקו ממרכז המעגל.

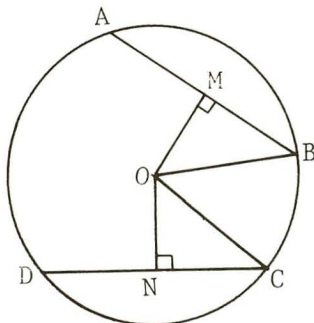
משפט

אם שני מיתרים במעגל (או במעגלים שווים) שווים זה לזה, גם רוחקיהם מהמרכז שווים זה לזה.



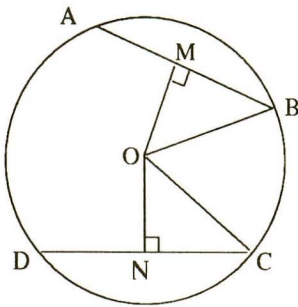
ולחיפך:

אם לשני מיתרים רוחקים שווים מהמרכז, המיתרים שווים זה לזה.



נוכיח את המשפט הישר.

$AB = CD$, O מעגל	נתון
$OM \perp AB$	
$ON \perp CD$	
$ON = OM$	צ"ל



הוכחה	ב"ע : נחבר את O ל-B ול-C $OC = OB$ (רדיוסים) $NC = MB$ (חצאי מיתרים שווים) $\sphericalangle N = \sphericalangle M$ (90°) $\triangle ONC \cong \triangle OMB$ (מ.ח. IV) $NO = MO$
-------	--

הוכח את הטענה ההפוכה!

משפט

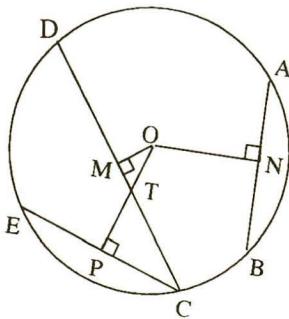
אם שני מיתרים במעגל (או במעגלים שווים), שונים זה מזה, שונים גם רוחקיהם מהמרכז, באופן כזה, שלמיתר הגדול רוחק קטן יותר מהמרכז.



להיפך

אם שני מיתרים נמצאים ברוחקים שונים מהמרכז, גם המיתרים שונים בגודלם, באופן כזה, שהמיתר הרחוק מהמרכז יהיה יותר קצר מהאחר.

נוכיח את המשפט הישר.



נתון	מעגל O $CD > AB$ $ON \perp AB$ $OM \perp DC$
צ"ל	$OM < ON$

הוכחה	ב"ע: $CE = AB$ $OP \perp CE$ $OP = ON$ (לפי המשפט הקודם) במשולש OMT : $OM < OT$ (היתר גדול מכל ניצב) כמו כן, $OP > OT$ (השלם גדול מחלקו) $OP > OM$ $ON > OM$ מ.ש.ל.
-------	--

4.4 נדגים שימוש במשפטים חשובים מסעיף זה:

דוגמה א'

הישר k חותך את המעגלים המרכזיים O .
נוצרים המיתרים $MN = 8$ ס"מ, $AB = 12$ ס"מ.
חשב את אורך הקטע AM .

פתרון

ב"ע: $OC \perp k$

$MC = CN$
 $AC = CB$ (עפ"י 4.1) } $\Leftarrow$

לכן, $AM = AC - MC = 6 - 4 = 2$ ס"מ

דוגמה ב'

שני מיתרים שווים AC ו- BD נחתכים בנקודה M . הוכח:
א. הקטע OM חוצה את הזווית שבין המיתרים.
ב. $MD = MC$

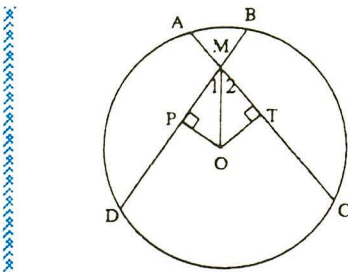
נתון

מעגל O $AC = BD$	
א. $\angle M_1 = \angle M_2$	צ"ל
ב. $MD = MC$	

הוכחה

ב"ע: $OP \perp DB$
 $OT \perp AC$
 $BD = AC$ (נתון)
 $PO = OT$ (רוחקי מיתרים שווים) $\Leftarrow$
לכן, $\triangle PMO \cong \triangle TMO$ (לפי מ.ח. IV. הסבר!) $\Leftarrow$
 $\angle M_1 = \angle M_2$ $\Leftarrow$

מ.ש.ל. א'



מהחפיפה האחרונה מתקבל:

$$MP = MT$$

וידועים $PD = TC$ (חצאי מיתרים שווים)
לכן: $MD = MC$ (חיבור שוויונים).

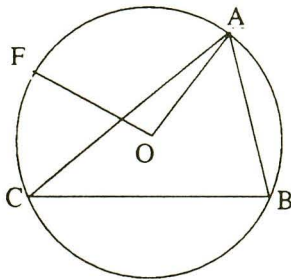
מ.ש.ל. ב'

שים לב



בבעיות הדנות במעגל, ובהן מוזכר רדיוס, כדאי לשרטט רדיוס לנקודה נתונה על המעגל.

למשל, אם בבעיה מוזכר משולש חסום במעגל, יש לשרטט את הרדיוס לנקודה A, למשל.
אם נעביר רדיוס לנקודה כלשהי F, יהא הדבר לרוב, חסר תועלת.



5. המשיק

המשיק - כפי שהגדרנו - הוא ישר, שיש לו נקודה אחת בלבד משותפת עם המעגל.

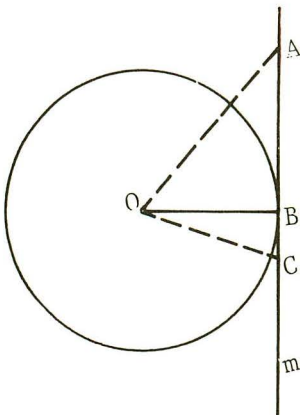
משפט

5.1

המשיק מאונך למחוג בנקודת ההשקה.



הוכחה

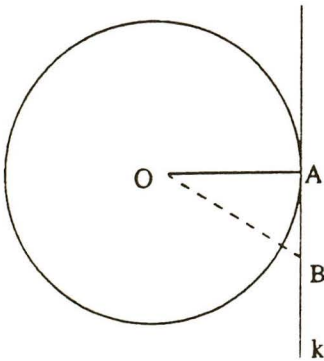


למעגל O ולמשיק m יש רק נקודה אחת משותפת B. יתר נקודות המשיק - A או C חיצוניות למעגל; לכן רוחקיהן מהמרכז גדולים מהרדיוס. הרוחק הקצר ביותר של נקודה מישור הוא אנך לישר, לכן $OB \perp m$



אם ישר מאונך לרדיוס בקצהו, הישר משיק למעגל.

הוכחה



הישר k מאונך לרדיוס OA בנקודה A .
 נוכיח שלישר k ולמעגל O יש רק נקודה אחת משותפת. אילו היתה נקודה משותפת נוספת B , היה המשולש OBA שווה-שוקיים ($OB = OA = R$). במקרה זה, גם הזווית OBA ישרה. מצב זה בלתי אפשרי. לפיכך, לישר k ולמעגל O יש רק נקודה אחת משותפת.

משפט זה מאפשר לשרטט משיק למעגל בנקודה נתונה על המעגל, ע"י שריטוט הרדיוס לנקודה הנתונה ובניית אנך לרדיוס בנקודה זו.



5.3 אורך משיק, היוצא מנקודה נתונה למעגל, הוא אורך הקטע בין הנקודה הנתונה לנקודת ההשקה.

למושג זה קשורות התכונות הבאות:

אם שני משיקים יוצאים מאותה נקודה למעגל, אז:

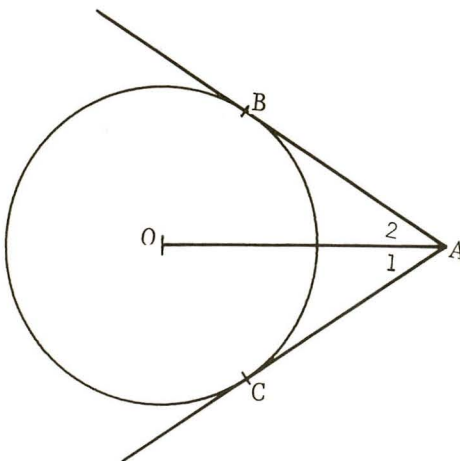
- א. **אורכיהם שווים זה לזה.**
- ב. **הקטע המחבר את הנקודה החיצונית למרכז המעגל, חוצה את הזווית בין המשיקים.**

כלומר:

$$AB = AC$$

$$\angle A_1 = \angle A_2$$

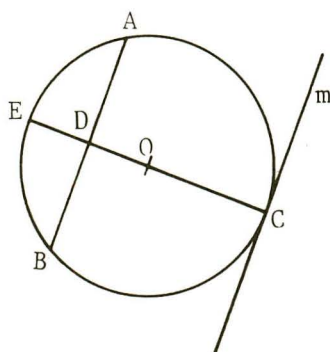
הוכח!



5.4 דוגמאות

דוגמה א'

הוכח: אם משיק ומיתר מקבילים, הקשת שביניהם, נחצית בנקודת ההשקה.

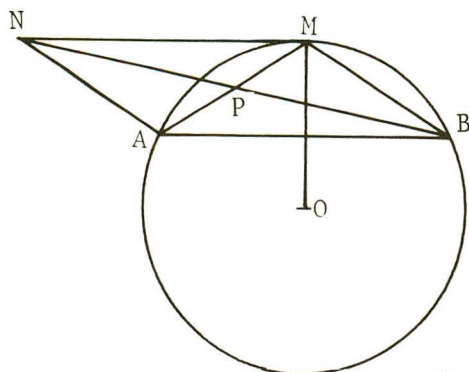


נתון	מעגל O m משיק ב-C AB מיתר $AB \parallel m$
צ"ל	$\widehat{AC} = \widehat{BC}$

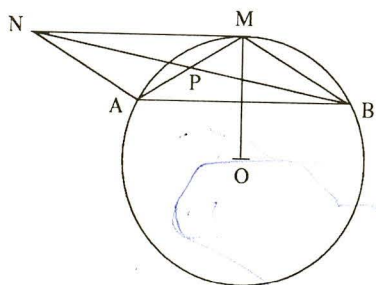
הוכחה ב"ע: קוטר דרך C
נוצרות נקודות D ו-E.
 $OC \perp m$ (משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה)
 $AB \parallel m$ (נתון)
 $CD \perp AB \Leftarrow$
 $\widehat{AE} = \widehat{BE}$ (נמק!)
 $\widehat{AC} = \widehat{BC}$ (משלימות את הקשתות הנ"ל לחצי מעגל)
מ.ש.ל.

דוגמה ב'

משולש MBA חסום במעגל O. בקודקוד M של המשולש, בונים משיק למעגל ומקצים עליו קטע MN, השווה ל-AB. נקודת החיתוך של AM ו-NB. הוכח: $NP = PB$.



נתון	מעגל O, משיק MN $MA = MB$ $MN = AB$
------	---



$NP = PB \Leftarrow$ (האלכסונים במקבילית חוצים זה את זה)

$$NP = PB$$

צ"ל

הוכחה

בי"ע: OM

$OM \perp MN \Leftarrow$ (לפי 6.1)

$AM = MB$ (נתון)

$\widehat{AM} = \widehat{MB} \Leftarrow$

$OM \perp AB \Leftarrow$ (נמק!)

$MN \parallel AB \Leftarrow$

וכן $MN = AB$ (נתון)

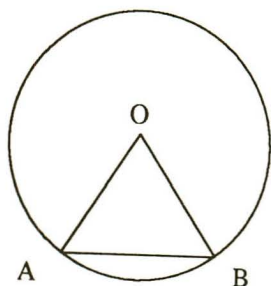
$ANMB$ מקבילית $\Leftarrow$

מ.ש.ל.

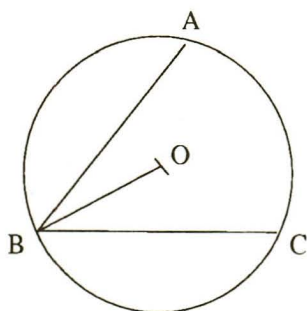


תרגילים

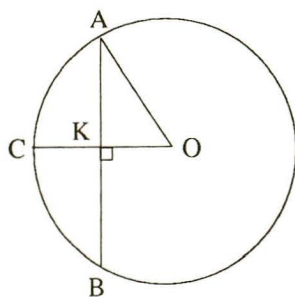
סעיפים 1-3



1. נתון מעגל O ובו מיתר AB.
השווה לרדיוס המעגל.
חשב את הזווית AOB.

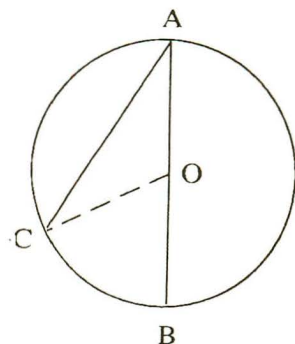


2. במעגל O שני מיתרים
שווים $AB = BC$.
נתון $\angle ABO = 40^\circ$.
חשב את $\angle OBC$.
הסבר!

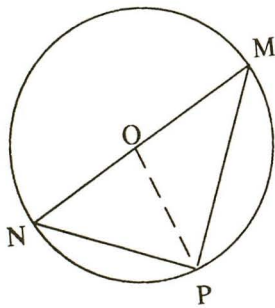


3. AB מיתר במעגל O.
נתון: $\angle OAB = 30^\circ$,
 $OC \perp AB$,
8 ס"מ $AO =$
חשב את CK.

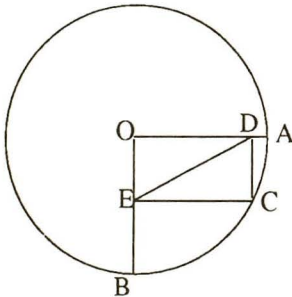
4. הוכח: אם רדיוס המעגל חוצה את הזווית שבין שני מיתרים AB ו-BC
(שרטוט כמו בתרגיל 2), המיתרים שווים זה לזה: $AB = BC$.



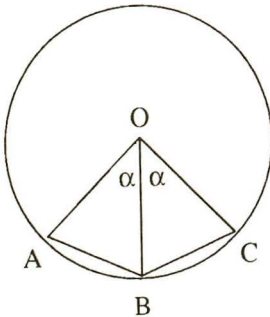
5. הוכח כי הקוטר הוא המיתר
הגדול ביותר במעגל,
כלומר: $AB > AC$
רמז: העזר בקשר בין
צלעות במשולש (פרק ג' 4.1).



6. MN קוטר במעגל O.
P נקודה על המעגל.
חשב את $\angle MPN$
רמז: המשפט ההפוך על
התיכון ליתר.

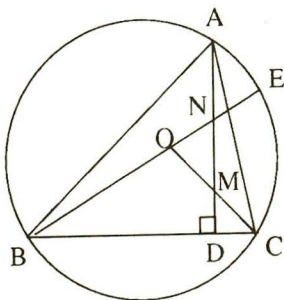


7. הקודקוד O של מלבן ODCE
נמצא במרכז המעגל O,
והקודקוד C על המעגל.
קוטר המעגל 6 ס"מ.
חשב את אורך הקטע DE.



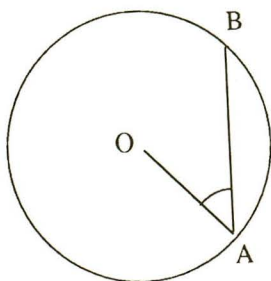
8. התיחס לנתונים בשרטוט
ציין איזה מרובע הוא
AOCB
הסבר!

9. המשך הקטע BO שבתרגיל הקודם
חותך את המעגל שנית ב-D,
ציין את סוג המרובע ADCO. הסבר!

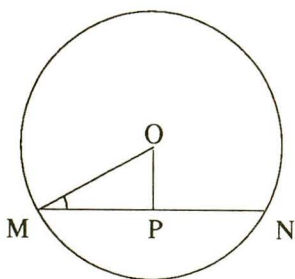


10. המשולש ABC חסום במעגל O.
 הגובה AD חותך את הרדיוס
 CO בנקודה M ואת הקוטר
 BE ב-N.
 הוכח: המשולש NOM שווים.

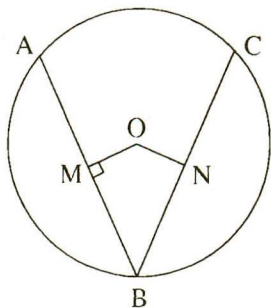
סעיף 4



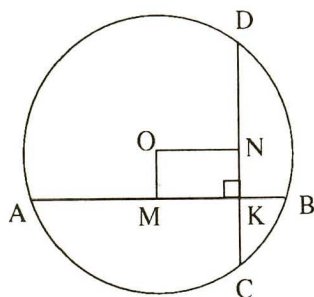
11. המיתר AB, שאורכו
 12 ס"מ יוצר זווית
 בת 45° עם הרדיוס OA.
 חשב את רוחק המיתר AB
 ממרכז המעגל.



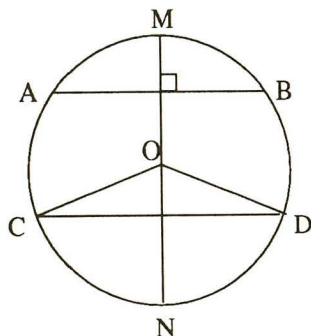
12. רדיוס המעגל O - 10 ס"מ.
 המיתר MN יוצר זווית M
 בת 30° עם הרדיוס OM.
 P אמצע המיתר MN
 חשב את אורך הקטע OP, הסבר!



13. בשרטוט נתון:
 $OM \perp AB$,
 N אמצע המיתר BC,
 $OM = 3$ ס"מ, $BC = 10$ ס"מ.
 $AM = 5$ ס"מ.
 חשב את MB ואת ON.



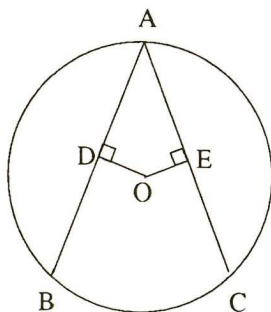
14. המיתרים AB ו-CD מאונכים זה לזה.
 OM ו-ON רוחקיהם מהמרכז O.
 נתון: $KB = 2$ ס"מ, $KC = 3$ ס"מ,
 $KA = 10$ ס"מ, $KD = 6$ ס"מ.
 חשב: א. את OM
 ב. את היקף המרובע OMKN.



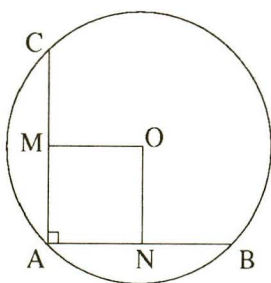
15. במעגל O שני מיתרים
 מקבילים AB ו-CD
 הקוטר MN מאונך ל-AB.
 הוכח:
 $\angle MOC = \angle MOD$

16. הוכח: אם שני מיתרים מקבילים $AB \parallel CD$ (שרטוט כמו בתרגיל הקודם), הקשתות בין המיתרים שוות זו לזו: $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

17. הוכח את הטענה שבתרגיל הקודם למקרה ששני המיתרים נמצאים מאותו צד של מרכז המעגל.



18. במעגל O נתון:
 $AB = AC$
 $OD \perp AB$
 $OE \perp AC$
 איזה סוג מרובע הוא ADOE? נמק!



19. המיתרים AB ו-AC, שבמעגל O שווים

זה לזה ומאונכים. M אמצע AC

ו- N אמצע AB

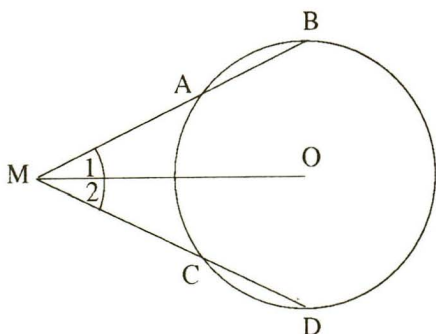
א. איזו צורה למרובע AMON? נמק!

ב. חשב את היקף AMON, כאשר

ידוע : $AB = 7$ ס"מ

20. הוכח : אם שני המיתרים AB ו-BC שווים זה לזה, אז הרדיוס

היוצא מ-B, חוצה את הזווית שביניהם.



21. הוכח : הטענה שבבעיה הקודמת

נכונה גם לגבי מיתרים שווים,

הנחתכים בהמשכיהם.

כלומר, אם : $AB = CD$,

אז : $\angle M_1 = \angle M_2$

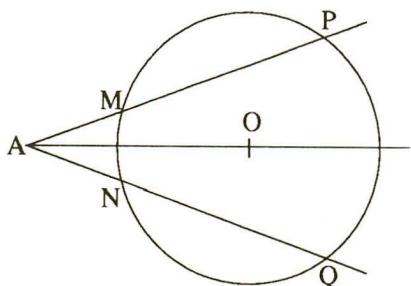
22. שני מיתרים AB ו-CD, השווים זה לזה, נחתכים בנקודה M. הוכח, כי

המיתרים מחלקים זה את זה, כך שקטעי האחד שווים לקטעי השני,

כלומר : $AM = CM$, $DM = BM$.

23. שני מיתרים שווים AB ו-CD נחתכים בהמשכיהם, בנקודה M.

הוכח כי : $AM = CM$, $DM = BM$.



24. מעגל שמרכזו נמצא על חוצה -

זווית A, חותך את שוקיה

בנקודות M, N, P, ו- Q. הוכח :

$AP = AQ$

$AM = AN$



25* בשרטוט שני מעגלים בעלי

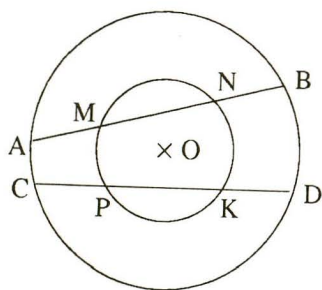
מרכז משותף O.

במעגל הגדול שני מיתרים שווים

AB ו-CD, החותכים גם את המעגל

הקטן בנקודות M, P, N, K.

הוכח: $AN = CK$



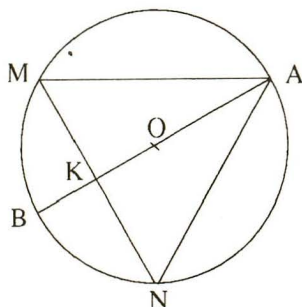
26* לרדיוס OB של מעגל O,

בנו אנך אמצעי MN.

AB - קוטר במעגל.

הוכח כי המשולש AMN

הוא שווה-צלעות.



27* הקוטר AB של מעגל O,

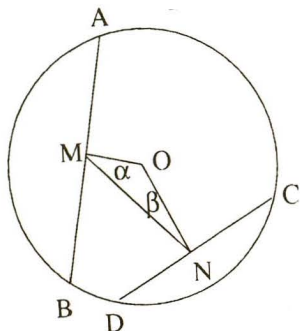
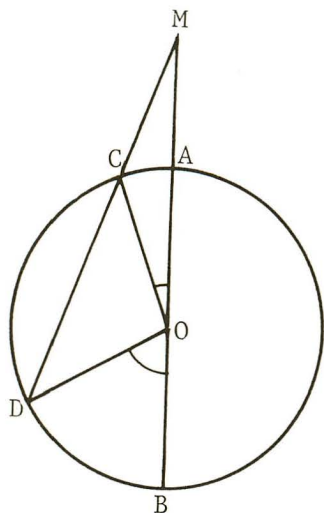
חותך את המיתר CD

בהמשכו, בנקודה M,

באופן כזה ש:

$$\angle BOD = 3\angle MOC$$

הוכח: $AB = CO + CM$



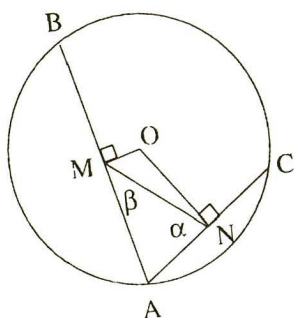
28. במעגל O שני מיתרים שונים:

$$AB > DC$$

M אמצע המיתר AB

ו- N אמצע CD

הוכח: $\alpha > \beta$



29*. AB ו- AC מיתרים במעגל O.

OM ו- ON אנכים למיתרים

הנייל.

נתון: $\alpha > \beta$

הוכח: $NO > MO$



30**. משולש ABC חסום במעגל O,

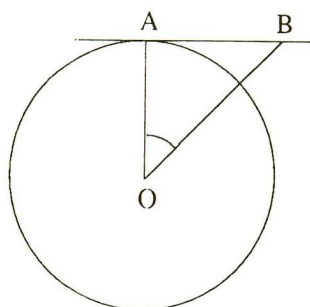
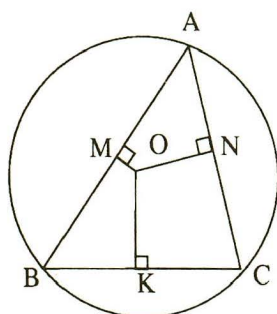
OM, ON ו- OK הם רוחקי

הצלעות AB, AC ו- BC (בהתאמה)

ממרכז המעגל.

נתון: $OM < OK$

הוכח: $ON + OK > BK$



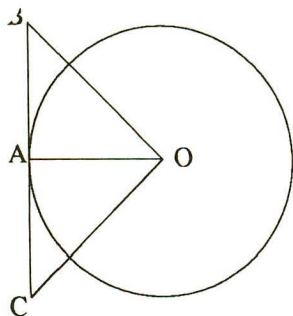
31. AB משיק למעגל O בנקודה A.

קוטר המעגל שווה ל- 12 ס"מ.

הקטע OB יוצר זווית בת 45°

עם OA.

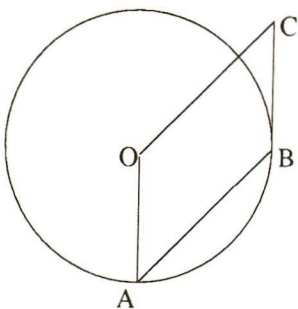
חשב את אורך המשיק AB.



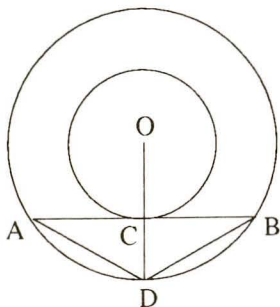
32. BC משיק למעגל O בנקודה A

ונתון: $AB = AC$

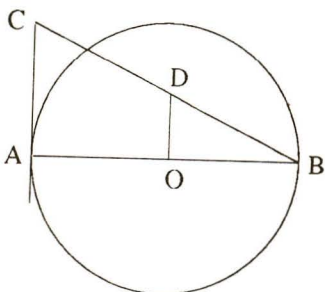
הוכח: $\angle B = \angle C$



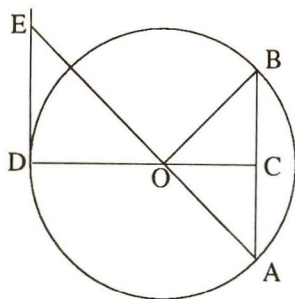
33. BC משיק למעגל O בנקודה B
והוא צלע של המקבילית OABC
חשב את גודל הזווית AOC.



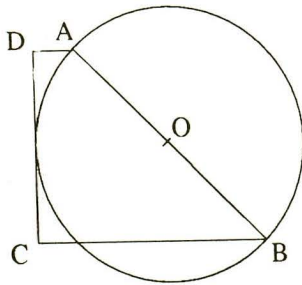
34. המיתר AB שבמעגל O (הגדול)
משיק למעגל שני, בעל אותו
מרכז O, בנקודה C.
D נקודת החיתוך של OC עם המעגל
הגדול.
הוכח: $\angle A = \angle B$.



35. AC משיק למעגל O ב־ A.
האנך DO לקוטר AB
חותך את BC בנקודה D.
הוכח: $CD = DB$.



36. C אמצע המיתר AB שבמעגל O.
CO חותך את המעגל ב־ D.
דרך D בנו משיק למעגל O,
החותך את AO, בהמשכו
בנקודה E.
הוכח: $\angle E = \angle B$.



37* המעגל O בנוי על השוק הארוכה

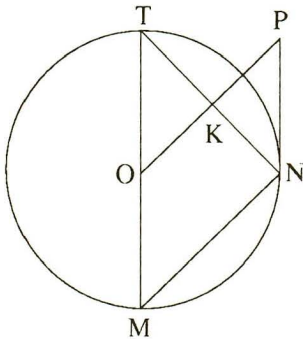
של טרפז ישר זווית, כקוטר.

השוק הקצרה של הטרפז DC

משיקה למעגל.

הוכח כי סכום בסיסי הטרפז

שווה לקוטר המעגל.



38* PNMO מקבילית שקודקודה במרכז

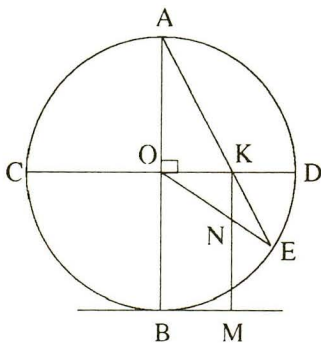
המעגל O, שני הקודקודים M ו-N על

היקף המעגל והצלע NP משיקה

למעגל בנקודה N.

הוכח: א. $TN = OP$

ב. $\angle TKP = 2\angle POT$



39* AB ו-CD קטרים מאונכים זה לזה

K נקודה על CD. AK חותך את המעגל

ב-E. בנקודה B בונים משיק למעגל.

האנך למשיק זה מנקודה K חותך את

המשיק ב-M ואת OE ב-N.

הוכח: $MN = NO$



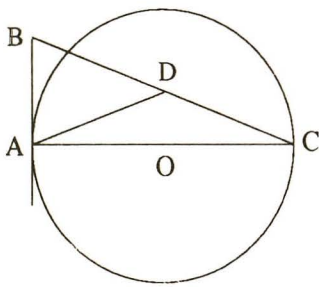
40* מהו המקום הגיאומטרי של מרכזי מעגלים בעלי רדיוס נתון R,

המשיקים לישר k? שרטט והסבר!

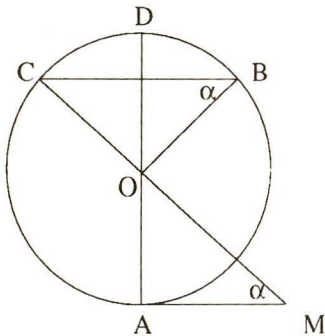


41* מהו המקום הגאומטרי של נקודות, שהן מרכזי מעגלים, המשיקים

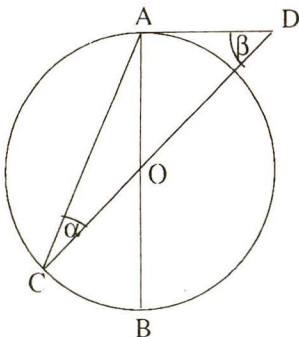
לשני ישרים מקבילים? שרטט והסבר!



42. הנקודה B החיצונית למעגל O
יוצרת משולש ABC
עם הקוטר AC.
נתון $AD = DC = BD$.
הוכח:
AB משיק למעגל O.



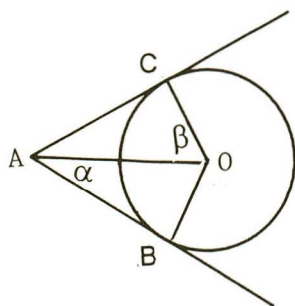
43. D אמצע הקשת BC במעגל O.
AD קוטר.
התיחס לנתונים שבשרטוט
והוכח, כי AM משיק
למעגל O בנקודה A.



44. AB קוטר במעגל O.
במשולש ACD שבשרטוט
נתון:
 $\beta = 40^\circ, \alpha = 25^\circ$
הוכח כי AD משיק למעגל.

סעיפים 5.3 - 5.4

45. הוכח: אם שני משיקים יוצאים מנקודה מסוימת אל מעגל, אז
אורכיהם שווים זה לזה.
46. הוכח: הקטע המחבר נקודה שמחוץ למעגל, למרכז המעגל, חוצה
את הזווית הנוצרת בין המשיקים, שיוצאים מאותה נקודה למעגל.

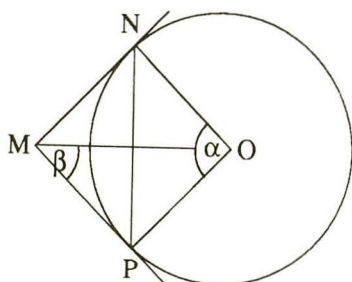


47. AB ו- AC משיקים למעגל O.

$$\angle BOC = 72^\circ$$

חשב את הזוויות

BAC, α ו- β.

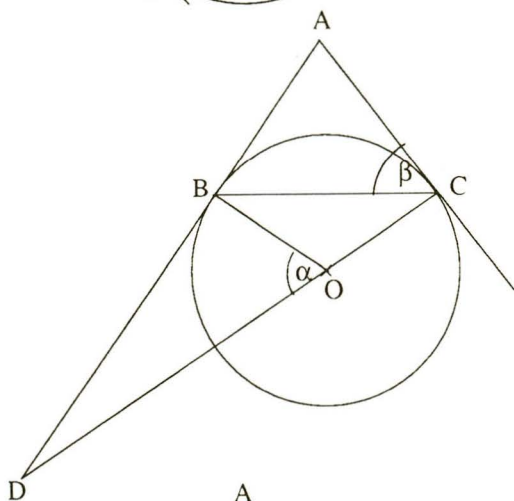


48. MN ו- MP משיקים למעגל O.

$$\angle MNP = 40^\circ$$

חשב את הזוויות :

MPN, α ו- β.



49. AB ו- AC משיקים למעגל O.

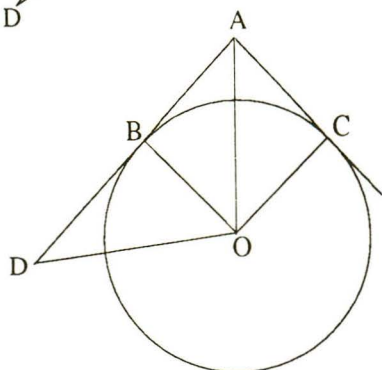
המשיק AB חותך את המשך

הרדיוס CO בנקודה D.

נתון :

$$\angle BDO = 38^\circ$$

חשב את α ו- β



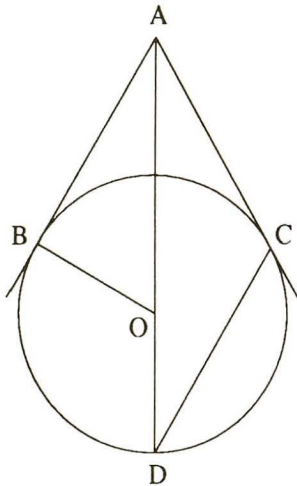
50. AB ו- AC משיקים למעגל O

נתון : BD = BA

(BD המשך AB),

$$\angle ADO = 44^\circ$$

חשב את הזוויות BAC, AOC ו- ACB.



51. AB ו- AC משיקים למעגל O.

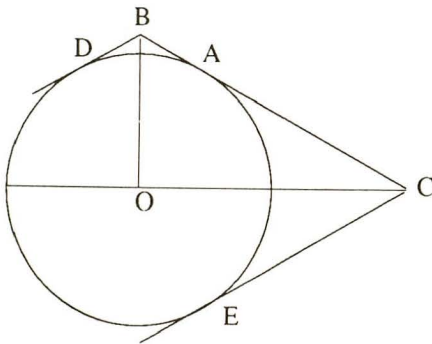
$\angle BOD = 110^\circ$ (קו ישר AOD).

חשב את הזוויות:

$\angle BCD, \angle ADC, \angle BAC$.

52. התיחס לשרטוט שבתרגיל הקודם, כשנתון $\angle BOC = 120^\circ$.

הוכח: $AD = 3OD$



53. המשיק למעגל O, בנקודה A פוגש

שני רדיוסים (בהמשכיהם)

בנקודות B ו- C.

נתון: $OB \perp OC$

BD ו- CE משיקים.

הוכח: $BD \parallel CE$

54. AB ו- AC משיקים למעגל O. BC - המיתר המחבר את נקודות ההשקה.

D נקודת החיתוך של AO עם BC

הוכח: א. $BD = DC$

ב. $\angle ADB = 90^\circ$

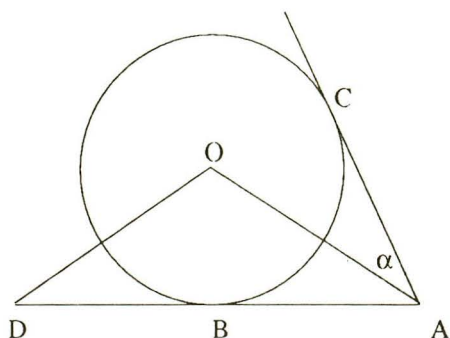
55. בתנאי הבעיה הקודמת, הוכח כי $\angle ABC = \angle COA$

56. מנקודה A יוצאים שני משיקים AB ו- AC למעגל O. המשיקים

מאונכים זה לזה. הוכח כי:

א. $AO = BC$

ב. $\angle CBO = 45^\circ$



57. AB ו- AC משיקים למעגל O

על המשך AB הקצו קטע BD

השווה ל- AC

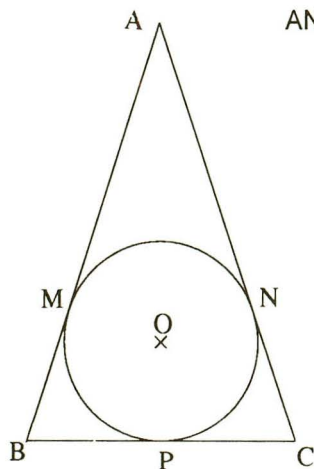
הוכח: א. $OD = OA$

ב. $\angle D = \alpha$

58. המעגל O חסום במשולש שווש ABC ($AB = AC$). M ו- N נקודות

ההשקה של AB ו- AC , בהתאמה. נתון: $AN = MB$

הוכח שהמשולש הוא שווה-צלעות.



59. במשולש ABC ($AB = AC$) חסום

מעגל O (נקודות ההשקה P, N, M).

נתון: $AM = 5$ ס"מ, $MB = 3$ ס"מ

א. חשב את היקף המשולש.

* ב. הוכח כי AP עובר דרך

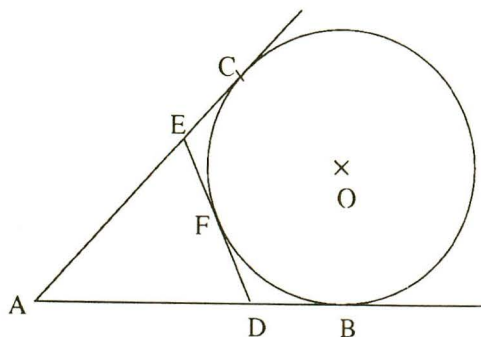
מרכז המעגל O .

60. המעגל O חסום במשולש ABC . M, N ו- K נקודות ההשקה של AC, AB ,

ו- BC , בהתאמה. נתון: $BK = 7$ ס"מ, $KC = 5$ ס"מ

חשב: א. בכמה גדולה הצלע AB מ- AC

ב. את ההפרש בין היקפי המשולשים ABK ו- ACK .



61. AB, AC ו- DE משיקים

למעגל O .

הוכח:

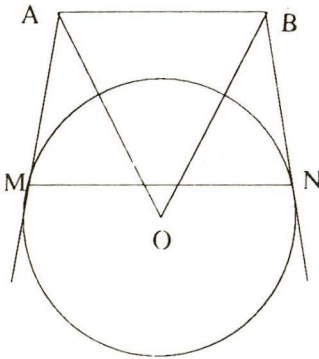
$AE - AD < EC + BD$



62* משולש שווה-צלעות MAB חסום במעגל O. בנקודה M בנו משיק למעגל והקצו עליו קטע MN, השווה לצלע המשולש.

הוכח: א. $MA \parallel NB$

ב. הקטע AN חוצה את הזווית MNB ומאונך ל-MB.



63* משתי נקודות A ו-B, הנמצאות

ברוחקים שווים ממרכז מעגל O,

בנו למעגל, משיקים AM ו-BN.

הוכח כי, ABNM הוא טרפז

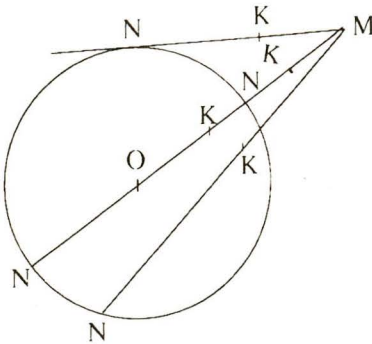
שווה-שוקיים.



64* לשני מעגלים בעלי מרכז משותף O, יש רדיוסים המקיימים $R = 2r$.

מנקודה M על המעגל הגדול, בנו שני מיתרים MP ו-MN, המשיקים

למעגל הקטן. הוכח כי הקטע PN, משיק למעגל הקטן.



65** נתון מעגל O ונקודה קבועה M.

הנקודה N נעה על היקף המעגל.

K אמצע הקטע MN.

מהו המקום הגאומטרי של הנקודות

K, הנוצרות עקב תנועות הנקודה N,

על היקף המעגל? הסבר!

תשובות

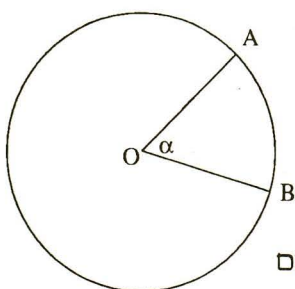


- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------|------------------|------------|
| (1) 60° | (2) 40° | (3) 4 ס"מ. | (6) 90° | (7) 3 ס"מ. | (8) דלתון. | (9) דלתון. |
| (11) 6 ס"מ. | (12) 5 ס"מ. | (13) 5 ס"מ, 3 ס"מ. | (14) א. 1.5 ס"מ, ב. 11 ס"מ. | (31) 6 ס"מ. | (33) 135° | |
| (18) דלתון. | (19) א. ריבוע, ב. 14 ס"מ. | (47) $36^\circ, 54^\circ, 108^\circ$ | (48) $50^\circ, 80^\circ, 40^\circ$ | (49) $64^\circ, 52^\circ$ | (59) 22 ס"מ. | |
| (50) $46^\circ, 46^\circ, 88^\circ$ | (51) $40^\circ, 35^\circ, 55^\circ$ | (60) א. 2 ס"מ, ב. 4 ס"מ. | | | | |

זוויות במעגל

6. מיון זוויות

6.1 בסעיפים הבאים נכיר את סוגי הזוויות הקיימות במעגל, את הקשרים ביניהן, ואת המשפטים לקביעת גודלן.
את הזוויות במעגל ניתן למיין לפי שוקיהן (רדיוסים, מיתרים, משיקים), תוך כדי ציון מקום הקודקוד שלהן.



א. רדיוסים יוצרים זווית **מרכזית**;

קודקודה במרכז המעגל.

α זווית מרכזית.

לפי סעיף 3.4 אפשר

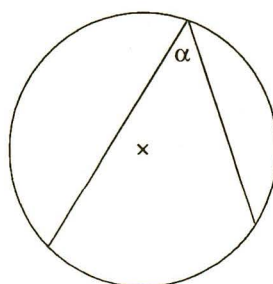
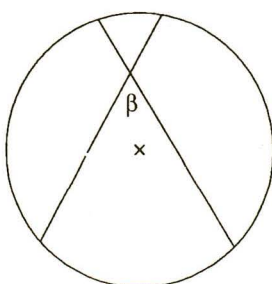
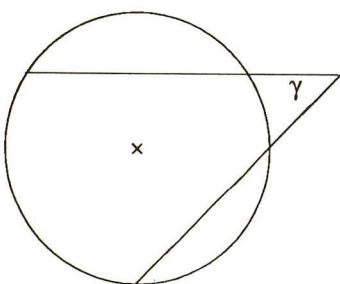
לכתוב $\angle O = \widehat{AB}$

ב. מיתרים נחתכים יוצרים שלושה סוגי זוויות, בהתאם למקום החיתוך שלהם:

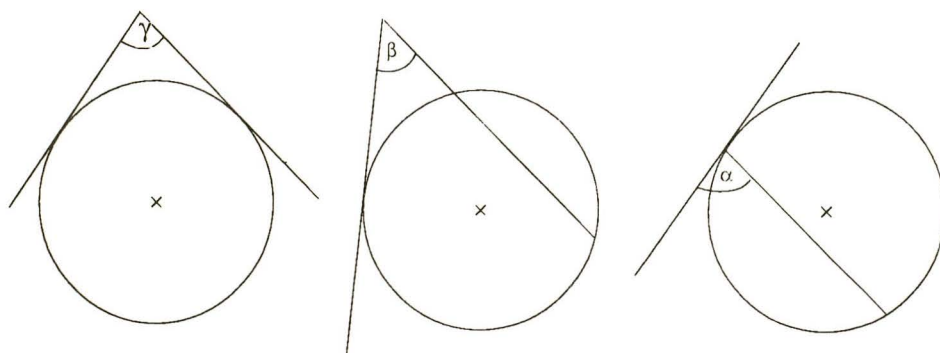
היקפית - אם הם נפגשים על היקף המעגל (α)

פנימית - אם הם נחתכים בתוך המעגל (β)

חיצונית - אם הם נחתכים בהמשכיהם, מחוץ למעגל (γ)



- ג. משיקים יוצרים שלושה סוגי זוויות:
 זווית בין משיק ומיתר, שקצהו בנקודת ההשקה (α)
 זווית בין משיק וחוטך (β)
 זווית בין שני משיקים (γ)



7. זווית היקפית

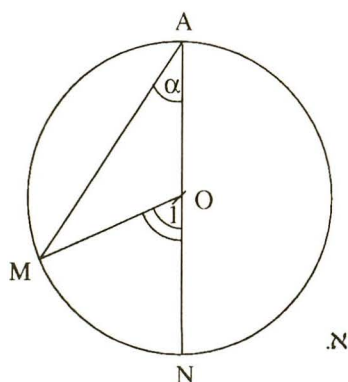
7.1 זווית היקפית נוצרת בין שני מיתרים היוצאים מנקודה אחת. הקשת שבין המיתרים זו הקשת שעליה "נשענת" הזווית ההיקפית.

משפט

זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית, הנשענת על אותה קשת.



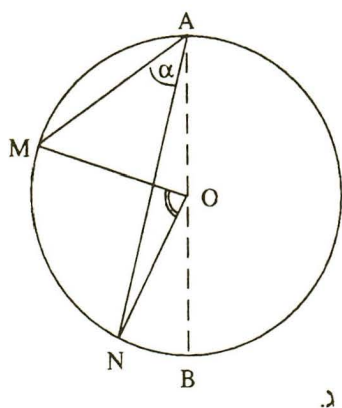
- לזווית היקפית יתכנו שלושה מצבים:
 א. מרכז המעגל נמצא על אחת משוקי הזווית - שוק זה הוא קוטר;
 ב. המרכז נמצא בין שוקי הזווית;
 ג. המרכז נמצא מחוץ לשוקי הזווית.



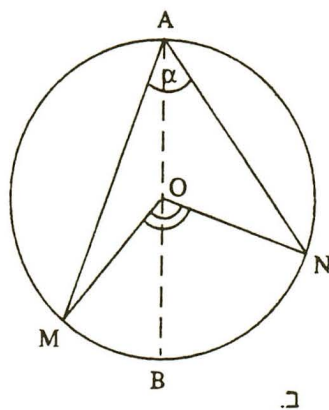
נוכיח את המשפט במקרה הראשון.
 יש להראות כי α שווה למחצית $\angle AOM$.

הזווית $\angle AOM$ חיצונית למשולש שוו"ש AOM , לכן היא שווה ל- 2α .
 ע"י כך מתקבלת מסקנת המשפט.

כדי להוכיח את המשפט בשני המקרים האחרים משרטטים קוטר מקודקוד הזווית ומפרידים את הזווית לסכום (מקרה ב') או להפרש (מקרה ג') של שתי זוויות ששוק אחת שלהן קוטר.



ג.



ב.

היות שמספר המעלות של זווית מרכזית, שווה למספר מעלות הקשת המתאימה לה, אפשר לנסח את המשפט האחרון גם כך:

משפט



זווית היקפית שווה למחצית הקשת שעליה היא נשענת.

נוסח זה של המשפט שימושי מאוד, כי הוא מאפשר לבטא מידת זווית היקפית באמצעות מידת הקשת, ללא צורך לבנות זווית מרכזית.

7.2

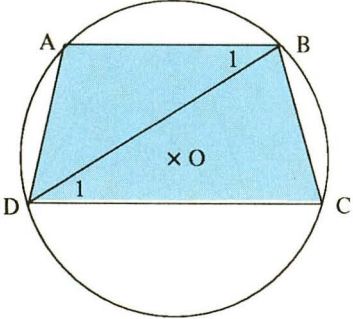
מסקנות

- א. כל הזוויות ההקפיות הנשענות על קשת אחת (או על קשתות שוות) שוות זו לזו. נמק!
- ב. זווית היקפית הנשענת על הקוטר היא זווית ישרה. ולהיפך:
זווית הקפית בת 90° נשענת על קוטר המעגל. נמק!

7.3 דוגמאות

דוגמה א'

הוכח: מיתרים מקבילים ($AB \parallel DC$) מהווים בסיסים של טרפז שוו"ש.



ה/כח

אם $AB \parallel CD$ אז

$\angle D_1 = \angle B_1$ (מתחלפות בין מקבילים)

לכן: $\widehat{AD} = \widehat{BC}$ (הקשתות המתאימות)

$AD = BC$ (נמק !)

$ABCD$ טרפז שווה-שוקיים. ←

משל. ←

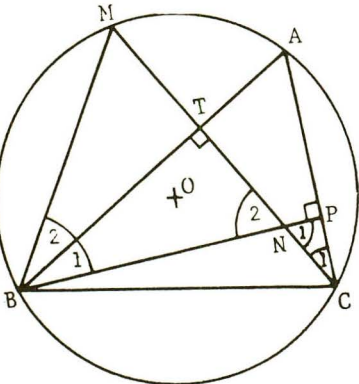
במהלך ההוכחה הנ"ל, התקבלה מסקנה שימושית מאוד:

מסקנות

מיתרים מקבילים (AB ו- CD) **כולאים קשתות שוות**: $\widehat{AD} = \widehat{BC}$
 קיימת גם הטענה ההפוכה:
אם בין שני מיתרים שאינם נחתכים בתוך מעגל, נמצאות קשתות שוות, המיתרים מקבילים. הוכח!

דוגמה ב'

משולש ABC חסום במעגל O . נקודת מפגש הגבהים CT חותך את המעגל בנקודה M .
 הוכח כי, המשולש BMN שווה-שוקיים.



נתון	O מעגל
	$PB \perp AC$
	$CT \perp AB$
צ"ל	$\triangle BMN$ שווה-שוקיים

הוכחה

במשולשים NPC ו-NTB

שתי זוויות שוות (אלו הן ?)

לכן גם $\angle B_1 = \angle C_1$

כמו כן $\angle B_2 = \angle C_1$ (הקפיות הנשענות על אותה קשת)

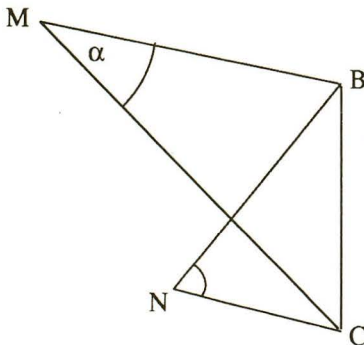
$\angle B_1 = \angle B_2 \leftarrow$

ונתון $MN \perp BT$

$BM = BN$ (אם במשולש, חוצה-זווית הוא גם גובה המשולש הוא שוו"ש) $\leftarrow$

מ.ש.ל

7.4 זווית ראייה



זווית ראייה של קטע היא זווית הנוצרת בין שני קטעים, היוצאים מנקודת תצפית, אל קצות הקטע. גודל זווית הראייה תלוי במקומה של נקודת התצפית ביחס לקטע.

למשל, מנקודה M רואים את הקטע BC בזווית ראייה α , השונה מזווית הראייה BNC.

מסקנה א', מאפשרת למצוא נקודות נוספות במישור שמהן רואים את הקטע BC, באותה זווית ראייה α .
ננסה זאת במשפט הבא:

משפט

המקום הגיאומטרי של נקודות במישור, שמהן רואים קטע נתון בזווית ראייה נתונה, אלו שתי קשתות של מעגלים שווים, שהקטע הנתון הוא מיתר משותף שלהם, וזווית הראייה הנתונה היא זווית היקפית, הנשענת על המיתר הנ"ל. הסבר!



8. זווית פנימית

זווית פנימית נוצרת בין שני מיתרים שנחתכים, בתוך המעגל.

משפט

זווית פנימית במעגל שווה למחצית סכום הקשתות הנמצאות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן



$$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{DC}}{2} \quad \text{כלומר:}$$

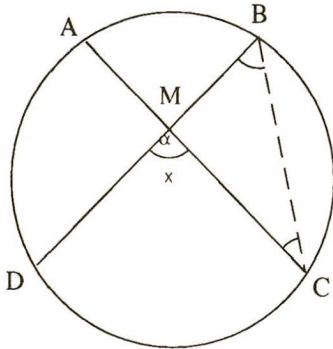
ה/כח

נחבר B ל-C.

α זווית חיצונית למשולש MBC,

לכן היא שווה לסכום הזוויות B ו-C

ובעזרת סעיף 7.1 מתקבלת מסקנת המשפט.



9. זווית חיצונית

9.1 זווית חיצונית נוצרת בין מיתרים הנחתכים בהמשכיהם מחוץ למעגל.

משפט

זווית חיצונית למעגל שווה למחצית הפרש הקשתות שבין שוקיה



$$\alpha = \frac{\widehat{CE} - \widehat{BD}}{2} \quad \text{כלומר:}$$

ה/כח

ב"ע: C-D

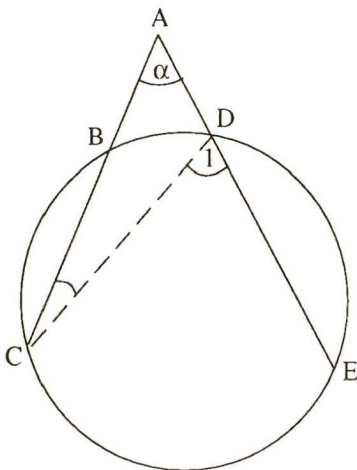
D ו-ADC זווית חיצונית למשולש

לכן הוא שווה לסכום

הזוויות A ו-C.

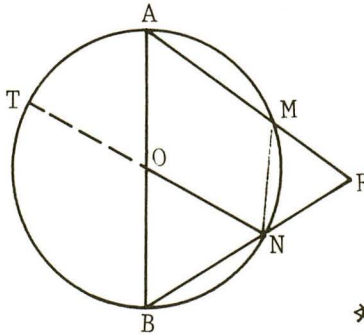
ובעזרת 7.1 מתקבלת

מסקנת המשפט.



9.2 דוגמה

מקצות הקוטר AB של המעגל O יוצאים שני מיתרים AM ו-BN. הוכח כי הזווית P, הנוצרת בין המשכי המיתרים שווה לזווית MNO (או MNT).



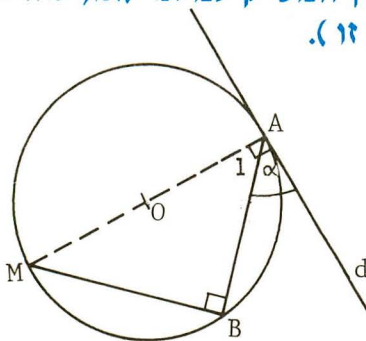
נתון	מעגל O קוטר AB מיתרים AM, BN
צ"ל	$\angle P = \angle MNO$
הוכחה	ב"ע: המשך NO (T) $\angle P = \frac{\widehat{ATB} - \widehat{MN}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{MN}}{2}$ (ז' חיצונית למעגל) $\angle MNT = \frac{\widehat{TAM}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{MN}}{2}$ לכן $\angle P = \angle MNT$ מ.ש.ל.

10. זווית בין משיק ומיתר

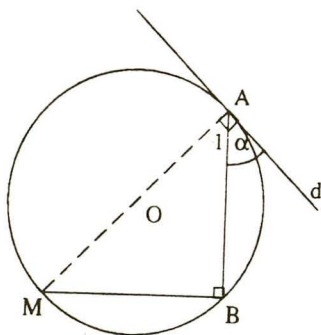
10.1 משפט



זווית בין משיק ומיתר, שקצהו בנקודת ההשקה שווה למחצית הקשת הכלואה בין המשיק למיתר (או, לזווית ההקפית הנשענת על קשת זו).



נתון	מעגל O משיק Ad מיתר AB
צ"ל	$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$



הוכחה | ב"ע: קוטר AM,

B - M

$$\angle A_1 + \alpha = 90^\circ \text{ (OA מאונך למשיק)}$$

$$\angle A_1 + \angle M = 90^\circ$$

(זווית B ישרה - נשענת על הקוטר)

$$\alpha = \angle M = \frac{\widehat{AB}}{2} \leftarrow$$

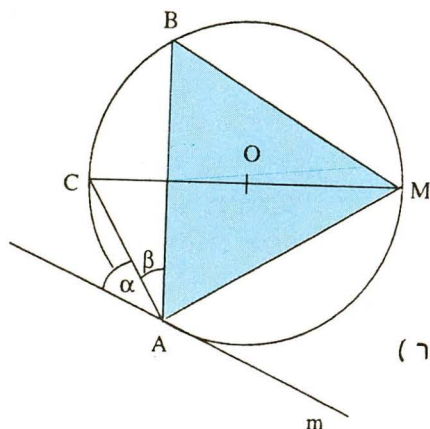
העובדה שזווית העזר M היא מקרה פרטי (שוק אחת שלה קוטר), אינה מגבילה את כלליות ההוכחה, שהרי כל הזוויות ההקפיות הנשענות על הקשת AB שוות זו לזו.



מ.ש.ל.

10.2 דוגמה

הישר m משיק למעגל O בנקודה A. AC ו-AB מיתרים במעגל, באופן כזה, שהזוויות α ו- β שוות זו לזו. CM קוטר במעגל. הוכח כי, המשולש ABM הוא שווה-שוקיים.

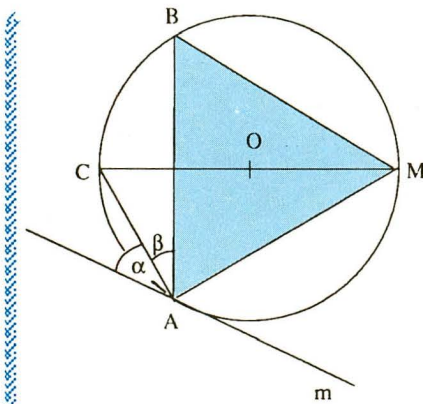


נתון	מעגל O, משיק m מיתרים AC ו-AB קוטר CM $\beta = \alpha$
------	---

צ"ל	$\triangle ABM$ שו"ש.
-----	-----------------------

הוכחה	$\beta = \frac{\widehat{BC}}{2}$ (זווית היקפית)
-------	---

	$\alpha = \frac{\widehat{AC}}{2}$ (זווית בין משיק למיתר)
--	--

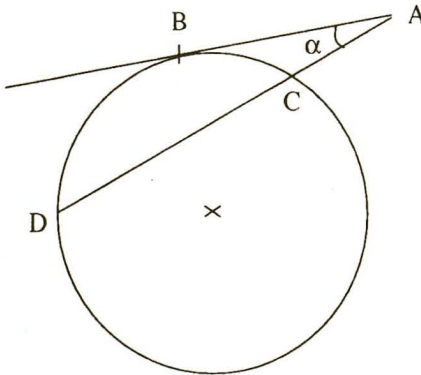


$$\begin{aligned} \beta = \alpha & \text{ (נתון)} \\ \widehat{BC} = \widehat{AC} & \Leftarrow \\ \widehat{CBM} = \widehat{CAM} & \text{ (CM קוטר)} \\ \widehat{BM} = \widehat{AM} & \text{ (חיסור שוויונים)} \\ BM = AM & \text{ (נמק !)} \end{aligned}$$

11. זווית בין משיק וחותר

משפט

זווית בין משיק וחותר שווה למחצית הפרש הקשתות בין החותר לנקודת ההשקה.



כלומר:
$$\alpha = \frac{\widehat{BD} - \widehat{CD}}{2}$$

חבר את B ל-D והוכח את המשפט!

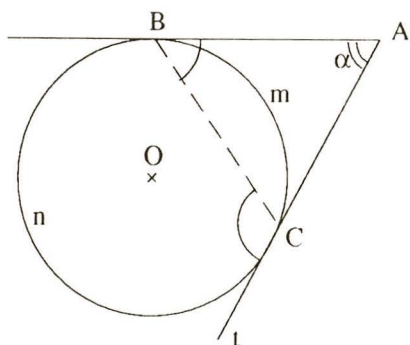
12. זווית ראייה של מעגל

12.1 זווית ראייה של מעגל היא זווית הנוצרת בין שני משיקים, היוצאים מאותה נקודה אל המעגל.

משפט

זווית ראייה של מעגל שווה למחצית הפרש הקשתות שבין נקודות ההשקה.





כלומר:

$$\alpha = \frac{\widehat{BnC} - \widehat{BmC}}{2}$$

חבר את B ל-C והוכח את המשפט!

12.2 דוגמה

מיתר מחלק את המעגל ביחס של 3:7, חשב את הזווית בין המשיקים העוברים דרך קצות מיתר זה.

(פתרון)

(לפי השרטוט הקודם).

נמצא את גודל הקשתות $\widehat{BmC}$ ו- $\widehat{BnC}$

$$3x + 7x = 360^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$$

$$\widehat{BmC} = 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ \quad \text{לכן}$$

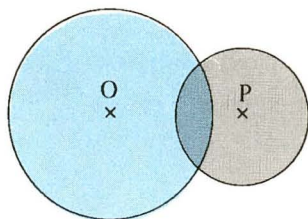
$$\widehat{BnC} = 7 \cdot 36^\circ = 252^\circ \quad \text{ו-}$$

ועל-ידי שימוש במשפט האחרון מתקבל $\angle A = 72^\circ$

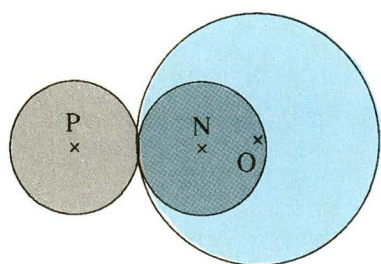
מ.ש.ל.

13. מצב יחסי של שני מעגלים

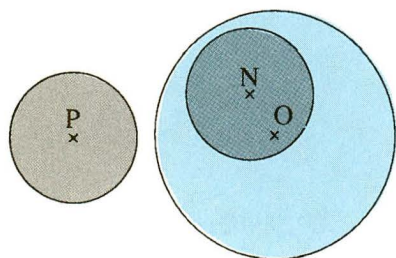
3.1 קיימות שלוש אפשרויות למצב היחסי של שני מעגלים:



א. לשני המעגלים שתי נקודות משותפות - מעגלים נחתכים.



- ב. לשני המעגלים נקודה אחת משותפת - מעגלים משיקים. במקרה זה קיימות שתי אפשרויות:
- משיקים מבחוץ P ו- O
 - משיקים מבפנים N ו- O

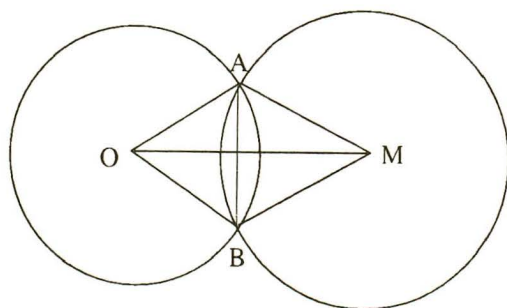


- ג. לשני המעגלים אין אף נקודה אחת משותפת. גם כאן קיימות שתי אפשרויות:
- כאשר מעגל אחד נמצא מחוץ למעגל האחר $(P$ ו- $O)$.
 - כאשר מעגל אחד נמצא בתוך המעגל האחר O ו- N .
- מקרה פרטי של המצב האחרון מתקבל כאשר לשני המעגלים מרכז משותף.

13.2 מעגלים נחתכים

משפט

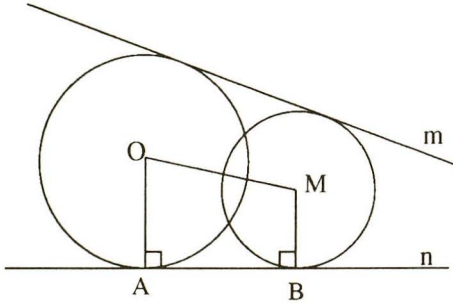
קטע המרכזים, של שני מעגלים נחתכים חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.



משפט זה ניתן להוכיח בקלות בעזרת משפט הדלתון. קטע המרכזים OM הוא האלכסון הראשי בדלתון OAMB ולכן הוא חוצה את המיתר המשותף AB ומאונך לו. מ.ש.ל.

משפט

קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים, קטן מסכום מחוגי המעגלים וגדול מהפרשם



לשני מעגלים נחתכים, יתכנו שני משיקים משותפים: m ו- n כל משיק יוצר עם נקודות ההשקה ועם קטע המרכזים טרפז ישר - זווית OMBA.

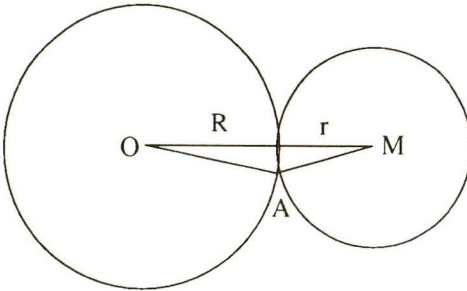
13.3 מעגלים משיקים

משפט

נקודת ההשקה של שני מעגלים משיקים נמצאת על קטע המרכזים שלהם.

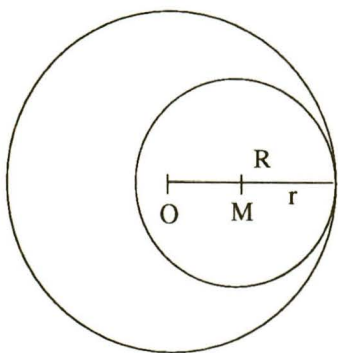


הסבר



נתייחס למקרה של מעגלים משיקים מבחוץ. אילו נקודת ההשקה A לא היתה מונחת על קטע המרכזים OM, היתה מתקבלת סתירה למשפט, שלפיו סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית; שכן, היה מתקבל, שהסכום $OA + AM$ קטן מ-OM. לפיכך במעגלים משיקים מבחוץ קטע המרכזים שווה לסכום מחוגי שני המעגלים:

$$OM = R + r$$



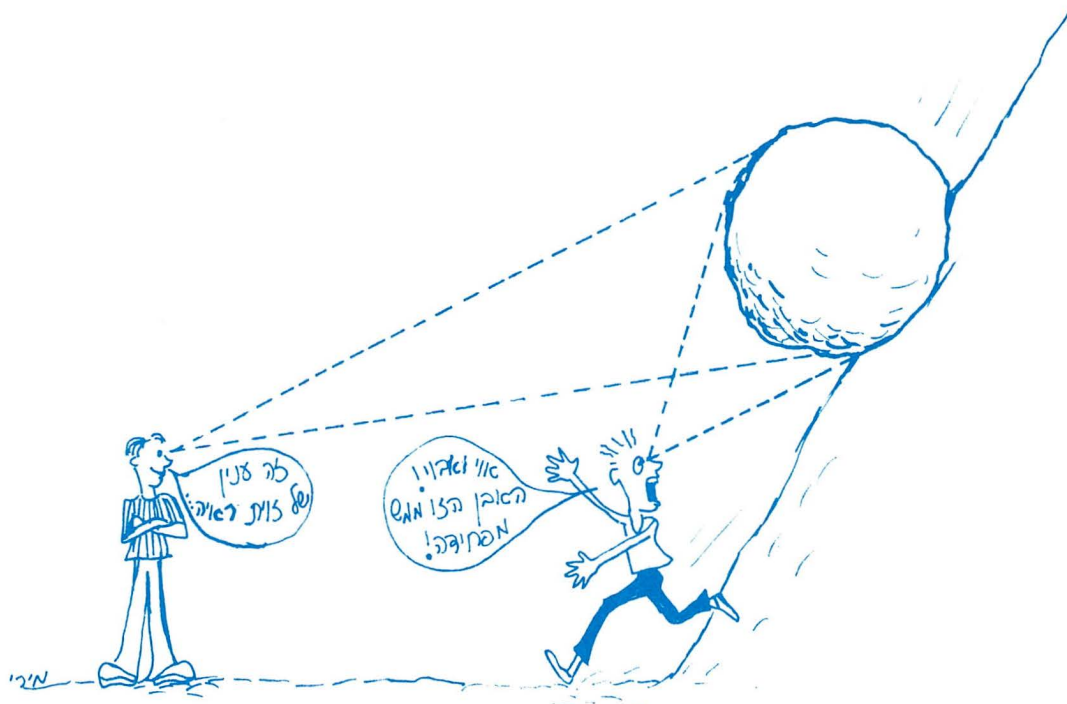
במעגלים משיקים מבפנים,
שווה קטע המרכזים להפרש
מחוגי שני המעגלים:

$$OM = R - r$$

למעגלים משיקים מבחוץ יש
שלושה משיקים משותפים, אילו
למעגלים משיקים מבפנים יש
משיק משותף אחד.

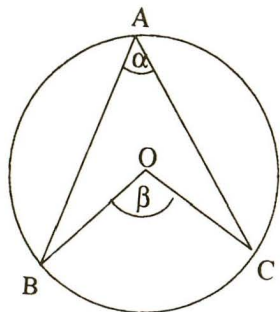
13.4 מעגלים חיצוניים ופנימיים.

לשני מעגלים חיצוניים יש ארבעה משיקים משותפים (שרטט!)
ואילו למעגלים פנימיים אין משיקים משותפים כלל.



תרגילים

סעיף 7



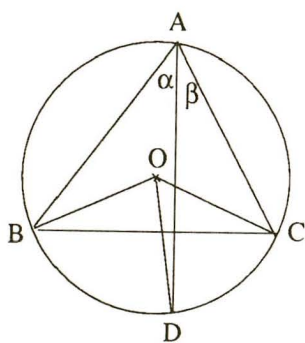
1. בכל אחד מהסעיפים הבאים

חשב את הגודל החסר מבין:

הזוויות α , β והקשת BC.

א. $\widehat{BC} = 86^\circ$, ב. $\beta = 108^\circ$

ג. $\alpha = 25^\circ$

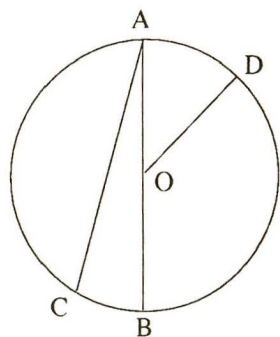


2. במעגל O נתון:

$\widehat{DC} = 42^\circ$, $\alpha = 2\beta$

חשב את גודל הזוויות:

α , β , $\angle BOC$.



3. AB קוטר במעגל O. ונתון

$\widehat{AD} = 70^\circ$, $\widehat{AC} = 140^\circ$

א. שרטט את הזווית המרכזית

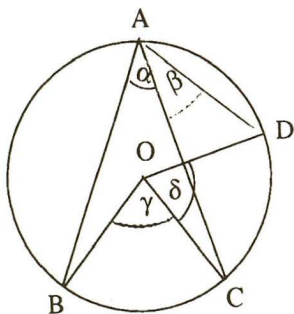
המתאימה לזווית BAC. חשב

את גודלה ואת גודל $\angle BAC$.

ב. שרטט את הזווית ההיקפית

בעלת קודקוד A המתאימה

לזווית BOD. חשב את גודלה.



4. גודל הקשת AC שבמעגל O 140° .

D אמצע $\widehat{AC}$ ו-B אמצע $\widehat{ACD}$.

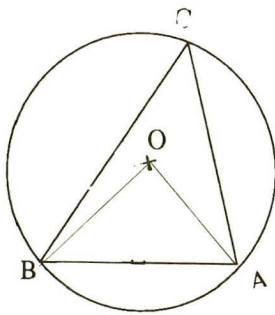
א. שרטט את הזוויות המרכזיות

המתאימות לזוויות BAC ו-CAD

וחשב את כולן (הקפיות ומרכזיות).

ב. מהי הזווית המרכזית המתאימה

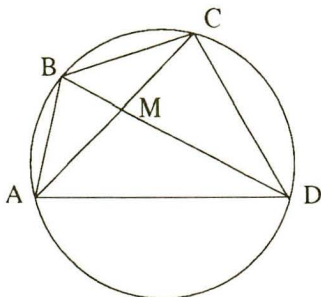
לזווית BCD? חשב את שניהן.



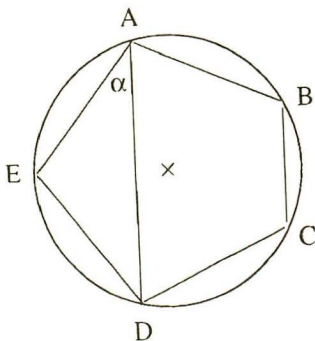
5. משולש ABC חסום במעגל O.
 הזווית AOB שווה 68° .
 הקשת BC 160° .
 חשב את זוויות המשולש ABC.

6. $\triangle ABC$ חסום במעגל O. זוויות המשולש מתייחסות כמו 2:3:4. חשב:
 א. את הקשתות AC, AB, BC.
 ב. את זוויות המשולש AOB (AB הצלע הגדולה במשולש ABC).

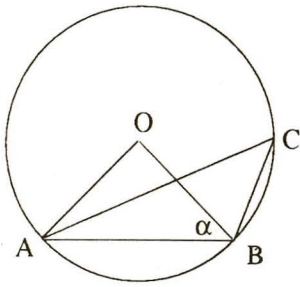
7. המרובע ABCD חסום במעגל O. הקשת AB קטנה מהקשת BC ב- 12° .
 וגדולה מהקשת AD ב- 12° . $\angle CBD = 72^\circ$, חשב את זוויות המרובע ABCD.



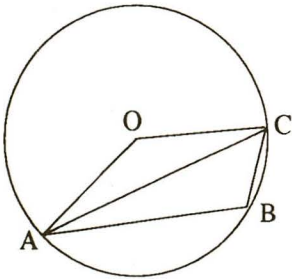
8. המרובע ABCD חסום במעגל.
 נתון (במעלות): $\widehat{AB} = 2a$, $\widehat{CD} = 10 + 3a$, $\widehat{BC} = 3a - 10$, $\widehat{AD} = 4a$.
 חשב את זוויות המשולשים ABD ו-AMD.



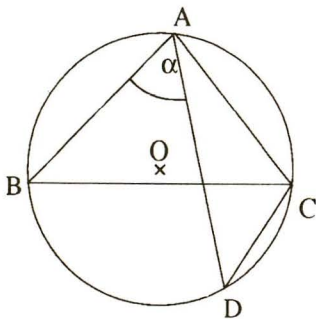
9. במחומש החסום במעגל נתון
 $AB = BC = CD$, $\widehat{AE} = 86^\circ$, $\alpha = 38^\circ$.
 א. חשב את זוויות המחומש.
 ב. הוכח: $AC = BD$.



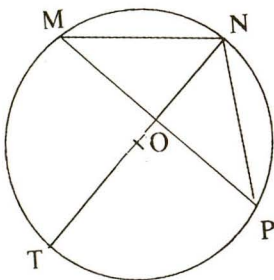
10. במעגל O רשום מיתר AB, ומיתר AC החוצה את הזווית OAB. נתון $\alpha = 40^\circ$. חשב את זוויות המשולש ABC.



11. גודל הזווית O שבשרטוט 128° .
א. חשב את הזווית ABC.
ב. אם ידוע ש- $\widehat{AB} = 3\widehat{BC}$ חשב את הזווית BCA.



12. ABC משולש שווש (AC=AB) החסום במעגל O. הזווית A (BAC) בת 84° . α מהווה $\frac{2}{3}$ מ-A. חשב את זוויות המשולש ADC.

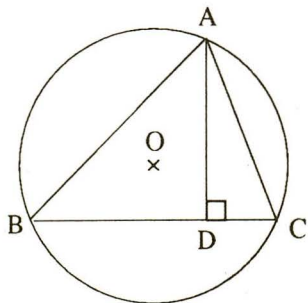


13. המשולש MNP חסום במעגל O. חוצה הזווית N עובר דרך מרכז המעגל O. הוכח כי המשולש MNP שווה-שוקיים.

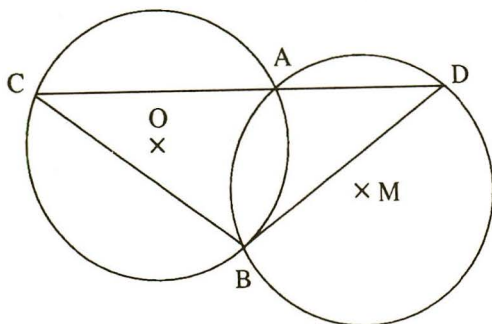
14. בתנאי הבעיה הקודמת, $\angle NPM = 36^\circ$. הוכח: $\widehat{MT} = 1.5\widehat{NP}$.

15. קוטר המעגל O ס"מ 14. הזווית בין שני המיתרים AB ו-BC בת 30° .
חשב את גודל המיתר AC.

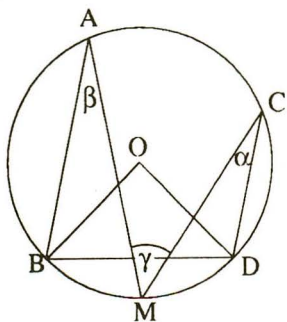
16. A, B, C נקודות על המעגל O. הקשתות AB, BC ו-AC מתייחסות כמו 1:2:3.
הראה כי המיתר AC גדול פי 2 מהמיתר AB.



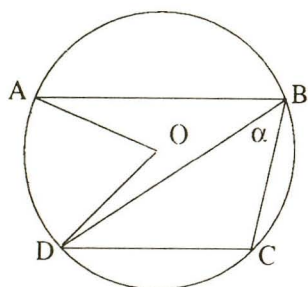
17. במעגל O נתון: $\widehat{BC} = X$
 $\widehat{AC} = 1.5X$, $\widehat{AB} = 4X - 30$
העזר בחישובים וקבע
אם מקום הגובה AD בשרטוט
מתאים לנתונים. הסבר!



18. שני מעגלים שווים O ו-M
נחתכים בנקודות A ו-B.
CD עובר דרך A.
הוכח:
המשולש BCD שווש.

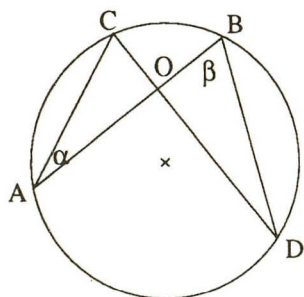


19. במעגל O נתון $AB \parallel CD$.
 $\angle ODB = 47^\circ$.
M נקודה על הקשת BD.
א. חשב את גודל הזווית γ (AMC).
ב. הוכח: $\alpha + \beta = \gamma$



20. במעגל O שני מיתרים
מקבילים $AB \parallel DC$.
C אמצע הקשת BD.
נתון $\alpha = 31^\circ$.
חשב את הזווית AOD.

21. במעגל O נתון $\widehat{AB} = \widehat{CD}$. הוכח כי, המיתרים AC ו-BD מקבילים.



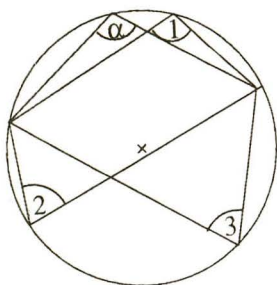
סעיף 7.2 א

22. בשרטוט נתון:

א- $\alpha = 32^\circ$ $\beta = 54^\circ$

ב- $\alpha = 50^\circ$ $\beta = 50^\circ$

חשב את הזוויות C ו-D.



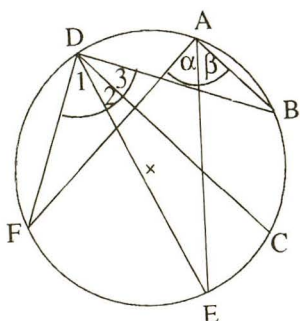
23. גודל הזווית α שבשרטוט נתון:

א. 70°

ב. 55°

ג. 90°

חשב את הזוויות 1, 2 ו-3.



24. בשרטוט נתון: $\angle 1 = 32^\circ$,

$\angle 2 = 18^\circ$, $\angle 3 = 35^\circ$

א. חשב את α ו- β

ב. אם נתון $AB \parallel CD$

חשב את הזוויות E ו-F.

25. התייחס לשרטוט שבתרגיל הקודם כאשר הנתונים הם: $\angle 1 = \angle 3$.

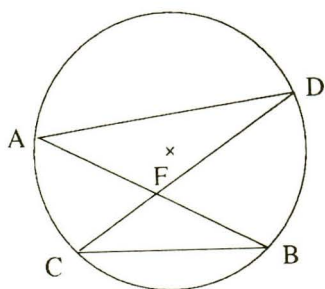
$\beta = 75^\circ$, $\angle 2 = 22^\circ$, $AE \parallel DF$. חשב את הזוויות α ו- γ .

26. שני מיתרים AB ו-CD נחתכים, בהמשכיהם בנקודה M.

הראה כי זוויות המשולש ADM ו־CBM שוות בהתאמה.

27. בתנאי התרגיל הקודם הוכח: אם המשכי המיתרים: BM ו-DM

שווים זה לזה, הרי גם המיתרים הנתונים שווים זה לזה.



28. המיתרים AB ו-CD נחתכים

בנקודה F. הוכח כי זוויות

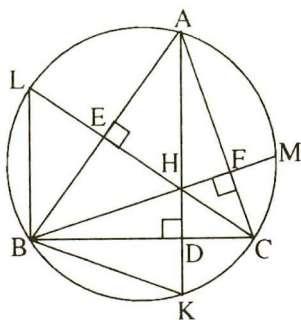
$\triangle AFD$ שוות בהתאמה לזוויות $\triangle BFC$.

התוכל למצוא שני משולשים נוספים,

שנוצרים ע"י שני המיתרים הנ"ל

וזוויותיהם שוות בהתאמה?

29. בתנאי הבעיה הקודמת: $FB = FD$. הוכח: המיתרים הנתונים שווים זה לזה.



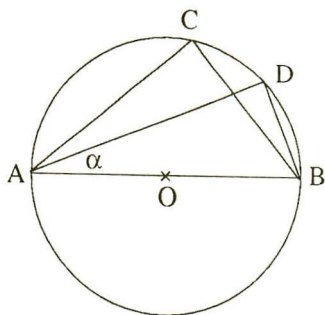
30. H נקודת המפגש של גבהי המשולש

ABC החסום במעגל O.

K, L ו- M נקודת החיתוך של המשכי

הגבהים עם המעגל (ראה שרטוט)

הוכח : $HD = DK$.

$$BL = BK \quad .1$$


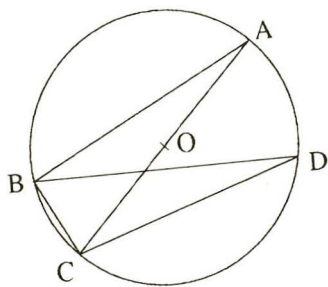
סעיף 7.2 ב

31. AD חוצה הזווית CAB

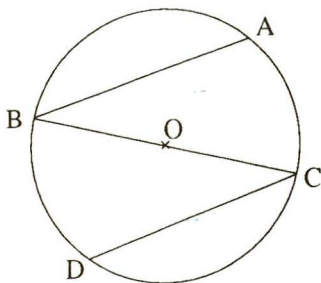
במעגל O.

נתון: $\alpha = 17^\circ$

חשב את הזווית ABC ו- ABC .

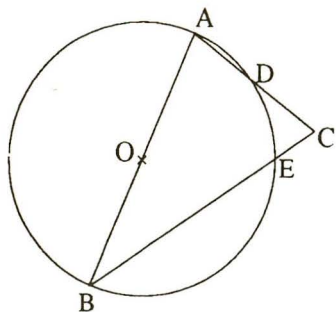


32. במעגל O נתון
 $\angle ACB = 48^\circ$
 חשב את הזווית D.



33. המיתרים AB ו-CD שבעגל O
 מקבילים.
 הוכח כי ABDC מלבן.

34. ABCD טרפז חסום במעגל O. DC קוטר. נתון $\angle ABD = 33^\circ$
 חשב את זוויות הטרפז.



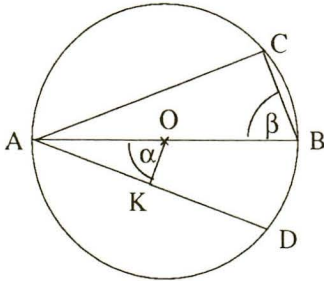
35. הנקודה D היא אמצע הקשת AE
 שבמעגל O.
 הוכח כי $\triangle ABC$ שווה-שוקיים.

36. הוכח: אם זווית היקפית במעגל ישרה, היא נשענת על קוטר המעגל.

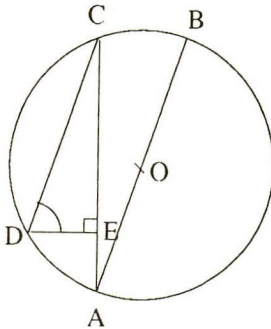
37. המשולש ABC חסום במעגל, ונתון: $AB = 10$ ס"מ, $\angle A = 32^\circ$, $\angle B = 58^\circ$.
 חשב את רדיוס המעגל.

38. $\triangle ABC$ חסום במעגל. $\angle ACB = 90^\circ$, D נקודה על AB, כך ש: $DC = AD$.
הוכח כי D היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC.

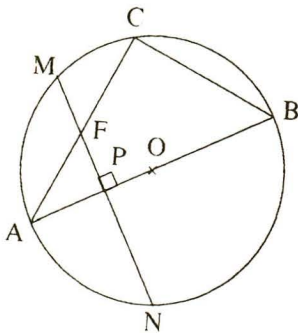
39. AC קוטר במעגל O. המיתרים AB ו-CD מקבילים.
הוכח כי המיתר BD עובר דרך מרכז המעגל.



40. AB קוטר במעגל O.
B אמצע הקשת CD.
K אמצע המיתר AD.
הוכח: $\alpha = \beta$

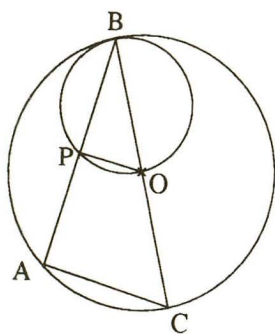


- 41* AB קוטר במעגל O.
נתון:
 $DE \perp AC$, $CD \parallel AB$
הוכח:
 $\angle D = \frac{1}{2} \widehat{ADC}$



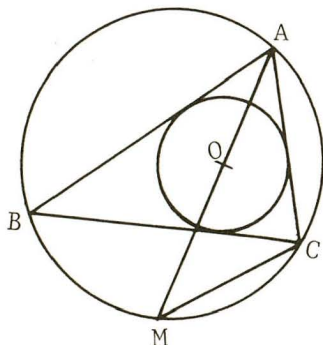
42. MN מיתר במעגל O.
OP רוחקו מהמרכז.
את הנקודה C שעל הקשת MB,
חיברו ל-A ול-B. $\angle B = 52^\circ$.
חשב את זווית MFC.

43. הוכח כי במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.
סקור שיטות נוספות, שבעזרתן הוכחת תכונה זו.



44* במעגל O בנו על הרדיוס OB מעגל שני, אשר OB משמש לו כקוטר. AB מיתר במעגל O, והוא חותך את המעגל הפנימי בנקודה P.

הוכח: $AC = 2PO$.

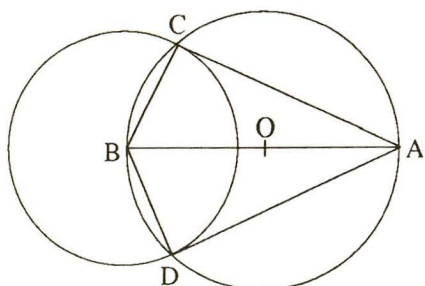


45* $\triangle ABC$ חסום במעגל.

במשולש זה חסום מעגל O.

הקטע AO חותך, בהמשכו את המעגל החוסם ב-M.

הוכח כי הזוויות BAM ו-MBC שוות זו לזו.

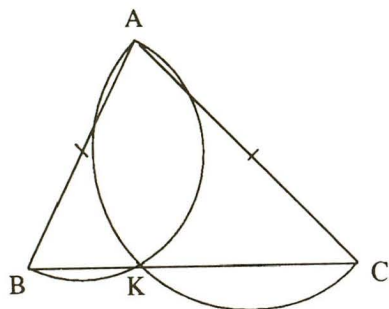


46* AB קוטר במעגל O.

מעגל שני שמרכזו B, חותך את המעגל O ב-C וב-D.

א. הוכח: B אמצע הקשת CD.

ב. הראה כי AC ו-AD משיקים למעגל B.

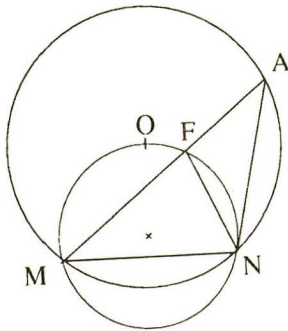


47** על הצלעות AC ו-AB של משולש ABC, בנו שני חצאי מעגלים.

הוכח כי, נקודת החיתוך השניה של שני המעגלים (פרט ל-A), מונחת על הצלע השלישית BC.



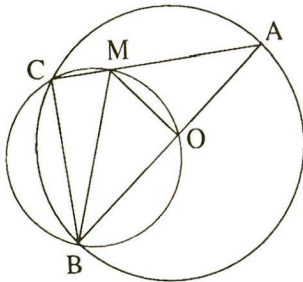
48** נתון מעגל O. מעגל שני, שעובר



דרך O חותך את הראשון בנקודות M ו-N. את קצות המיתר MN חיברו לנקודה A, שעל המעגל O. F נקודת החיתוך של AM עם המעגל השני. הוכח כי: המשולש FAN שווה.



49* $\triangle ABC$ חסום במעגל O.



דרך O, B, C עובר מעגל נוסף, החותך את AC ב-M. הוכח:

א. מרכז המעגל הקטן

נמצא על MB.

ב. זוויות $\triangle ABC$ שוות

בהתאמה לזוויות $\triangle AMO$.



50* בתנאי התרגיל הקודם, נתון: $ON \parallel AC$ (N על BC). הוכח כי:

א. N אמצע BC.

ב. נקודת החיתוך של ON ו-BM היא מרכז המעגל הקטן.

51 BD ו-CE הם גבהים במשולש ABC. הוכח כי ארבע הנקודות B, C, D, E ו- O

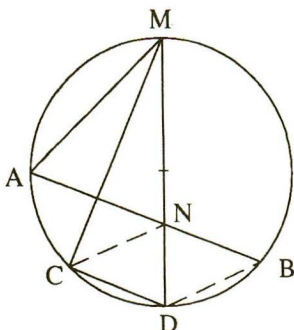
נמצאות על מעגל אחד, שקוטרו BC.



52* BN ו-CM גבהים במשולש ABC. O נקודת החיתוך שלהם.

הוכח: א. זוויות $\triangle OCB$ שוות בהתאמה לזוויות $\triangle OMN$.

ב. $\angle ABC = \angle ANM$.



53** AB ו-CD שני מיתרים מקבילים

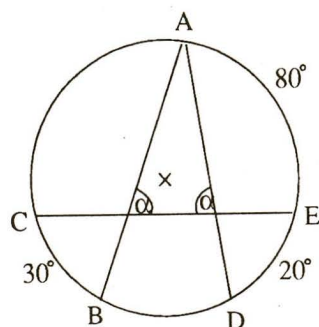
באופן כזה, ש-D אמצע הקשת BC.

MD קוטר במעגל. הוכח:

א. $AM = MN$

ב. NBDC מקבילית.



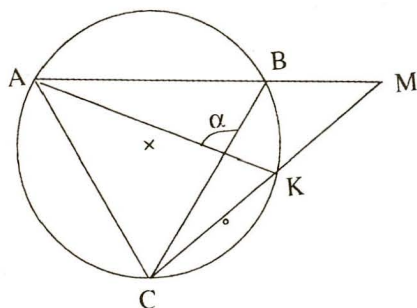


סעיפים 8, 9

54. התייחס לנתונים שבשרטוט,

וחשב את α ואת הקשתות

AC ו-BD.



55. $\triangle ABC$ משולש שו"צ.

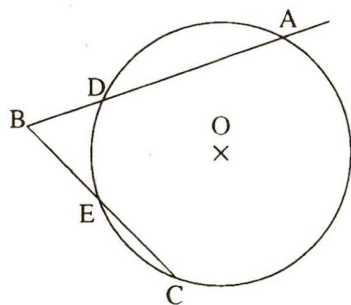
K נקודה על הקשת BC.

נתון $\alpha = 95^\circ$.

חשב את גודל הזווית M.

56. הנקודות A, B, C, D מחלקות את המעגל ביחס של 6:2:1:3.

(AB הקשת הראשונה). חשב את הזווית הנוצרת בין המיתרים AC ו-BD.



57. D אמצע הקשת ADC במעגל O.

$AD = 100^\circ$. E נקודה על DC,

כך ש: $\widehat{AC} = 5\widehat{DE}$.

חשב את הזווית B ואת הזווית

בה נחתכים המיתרים AE ו-CD.

58. ABCD טרפז חסום במעגל. הזווית המרכזית הנשענת על השוק AB של הטרפז

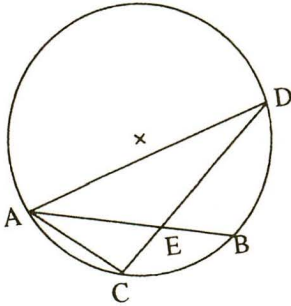
היא בת 70° . חשב את הזווית בין אלכסוני הטרפז.

59. על קוטרו של מעגל בנו טרפז חסום במעגל. הבסיס הקטן של הטרפז שווה

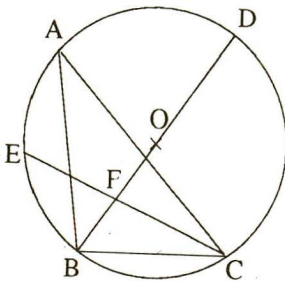
לשוקו. חשב את הזווית בין אלכסוני הטרפז.

60. הטרפז ABCD חסום במעגל. הבסיס הגדול של הטרפז AD שווה לשוקו. הקשת BC בת 60° . חשב את הזווית בין המשכי שוקי הטרפז.

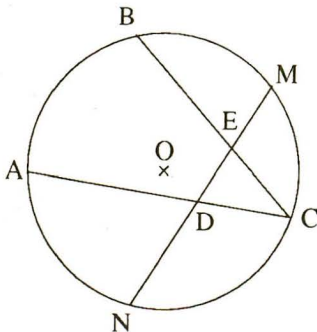
61. מרובע ABCD חסום במעגל. הזווית M בין המשכי הצלעות CB ו-DA בת 50° . הקשת השייכת לצלע AB בת 40° . הוכח כי אלכסוני המרובע מאונכים.



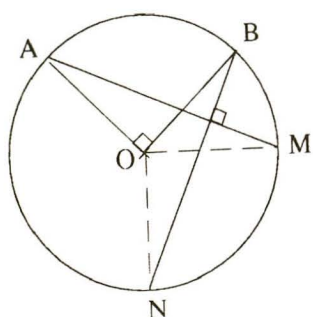
62. דרך האמצע C של הקשת AB משרטטים מיתר CD. הוכח: $\angle DEB = \angle CAD$.



63. $\triangle ABC$ חסום במעגל O. BD קוטר, $\angle A = 25^\circ$, $\angle B = 105^\circ$. חוצה הזווית C חותך את BD ב-F ואת המעגל ב-E. הראה כי, $EC \perp BD$.



64. AC ו-BC מיתרים במעגל O. M אמצע הקשת BC, N אמצע הקשת AC, MN חותך את המיתרים בנקודות D ו-E. הוכח: $\triangle CDE$ שווה.

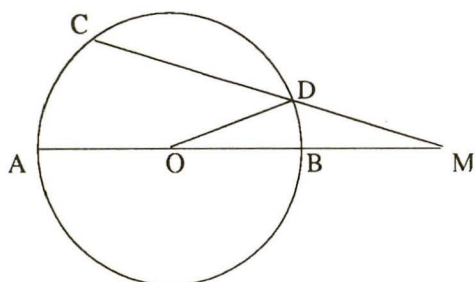


65. הרדיוסים AO ו-BO מאונכים.

כמו כן מאונכים המיתרים

AM ו-BN.

הוכח: $ON \perp OM$.



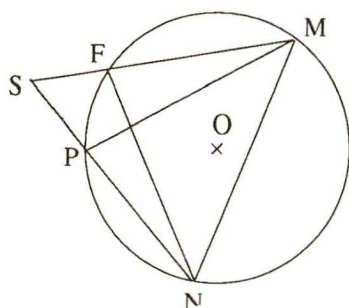
66. הקוטר AB חותך את המשך

המיתר CD ב-M. DM שווה

לרדיוס המעגל.

נתון: $\angle M = \alpha$

בטא באמצעות α את הקשת AC



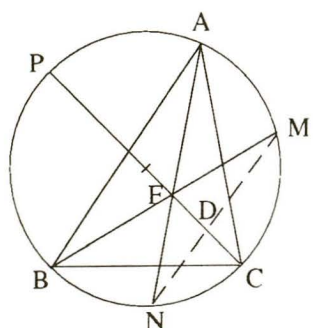
67. במעגל O שני מיתרים שווים

$MP = MN$. דרך הנקודה F שעל

הקשת MP משרטטים קרן MF,

החותכת את המשך NP ב-S.

הוכח: $\angle S = \angle MNF$



68. בתנאי התרגיל הקודם, F אמצע הקשת MP.

הוכח: א. $NF = FS$ ב. $MP = PS$.

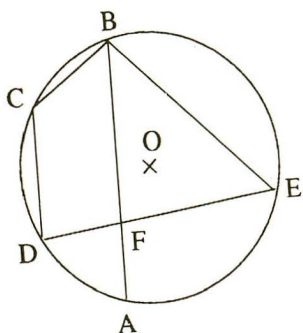


69. $\triangle ABC$ חסום במעגל.

BM ו-CP חוצי זוויות שלו,

והם נחתכים בנקודה F.

הוכח: $CF \perp MN$

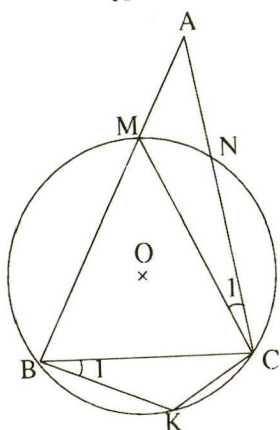


70. במעגל O שני מיתרים מקבילים

$$AB \parallel CD$$

E נקודה על הקשת AB.

$$\angle CBE = \angle AFE \text{ הוכח:}$$



71. המעגל O עובר דרך הקודקדים

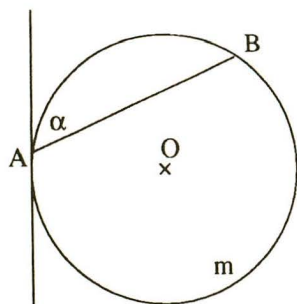
B ו-C של המשולש ABC וחותר

את צלעותיו בנקודות M ו-N.

$$\angle C_1 = \angle B_1 \text{ נתון:}$$

$$\angle BCK = \angle A \text{ הוכח:}$$

סעיפים 10-12.



72. המיתר AB חותר מהמעגל O

קשת AB הקטנה ב- 100°

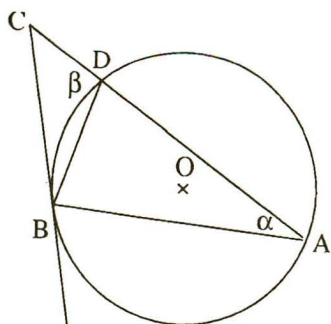
מהקשת AmB.

חשב את גודל הזווית α .

73. מיתר AB מחלק את המעגל O לשתי קשתות, שהיחס ביניהן

הוא 5:4. AK ו-BK משיקים למעגל (A, B נקודות ההשקה).

חשב את זוויות המשולש ABK.



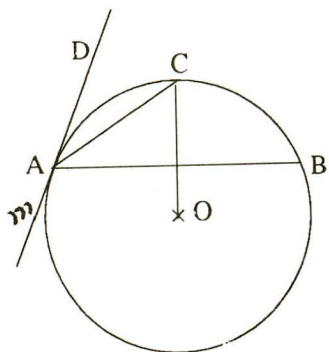
74. AB מיתר במעגל O.

BC משיק למעגל בנקודה B,

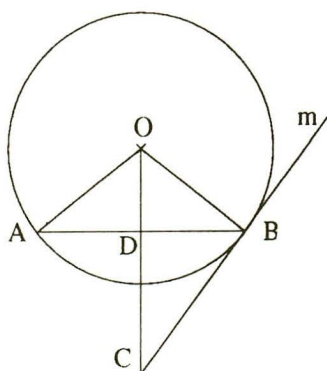
$$\alpha = 38^\circ$$

$$\beta = 2.5\alpha$$

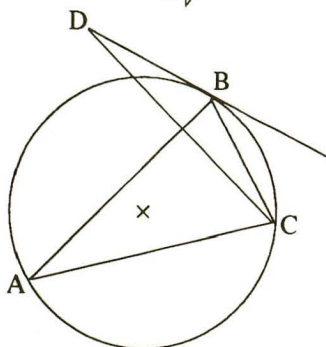
חשב את זוויות המשולש ABC.



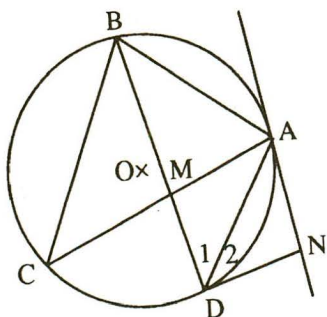
79. הישר m משיק למעגל O
 בנקודה A .
 OC מאונך למיתר AB .
 הוכח: AC חוצה את
 הזווית DAB .



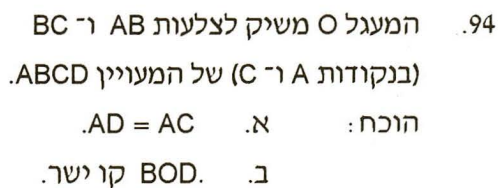
80. הישר m משיק למעגל O
 בנקודה B .
 הקטע OC חוצה את המיתר AB .
 הוכח כי, זוויות $\triangle BDC$ שוות
 בהתאמה לזוויות $\triangle ADO$.



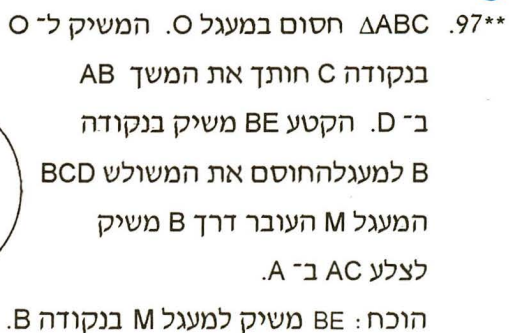
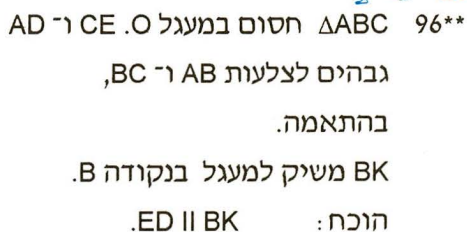
81. במעגל נתונים שני מיתרים
 שווים AB ו- AC .
 בנקודה B בנו משיק למעגל
 והקצו עליו קטע BD השווה
 ל- BC .
 הוכח כי הקטע CD מאונך למיתר AB .



82. $\triangle ABC$ חסום במעגל O . חוצה הזווית
 B חותך את AC ב- M ואת המעגל
 ב- D . AN משיק למעגל בנקודה A .
 נתון $AN = AM$.
 הוכח: א. $MD = ND$.
 ב. $\angle D_1 = \angle D_2$.



95* . התייחס לנתונים שבתרגיל הקודם ונוסף לזה נתון: CO חותך את המעגל שנית בנקודה K (שרטט !). הוכח: $BD = 3KD$.



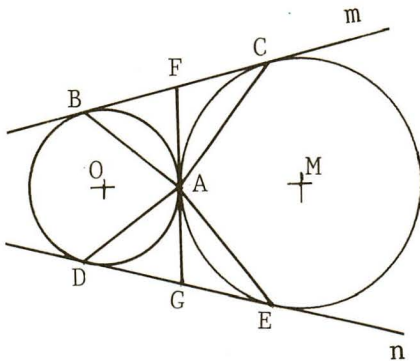
98. שני מעגלים שווים O_1 ו- O_2 משיקים
ב- E. AB ו- CD משיקים משותפים.
הוכח:
א. $AB \parallel CD$
ב. המשיק המשותף הפנימי

מאונך לשני המשיקים האחרים.

99. שני מעגלים שווים משיקים מבחוץ. הוכח כי, ארבע נקודות ההשקה של המשיקים החיצוניים הם קודקדים של ריבוע.

100. שני מעגלים שווים O ו- B משיקים מבחוץ בנקודה A . MN ו- TS הם משיקים חיצוניים. הוכח כי, הקטע MS עובר דרך נקודת ההשקה A .

101. שני מעגלים שווים משיקים מבחוץ ב- M . את המיתר AM , שבמעגל אחד, המשיכו לתוך השני, עד שחתך מעגל זה בנקודה B . הוכח: $MB = AM$.



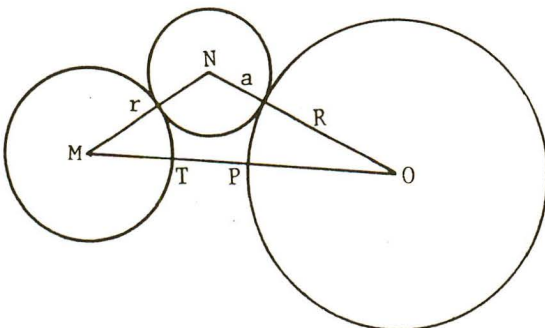
102. המעגלים O ו- M משיקים

בנקודה A .

m ו- n משיקים משותפים של המעגלים (B, C, D, E) נקודות ההשקה. הוכח כי, המשולשים BAC ו- DAE ישרי זווית.

103. מהו המקום הגיאומטרי של מרכזי כל המעגלים, המשיקים למעגל נתון בנקודה נתונה עליו.

104. מהו המקום הגיאומטרי של מרכזי כל המעגלים, בעלי רדיוס נתון r , המשיקים למעגל נתון.



105. נתונים שני מעגלים חיצוניים

O ו- M , בעלי רדיוסים R ו- r :

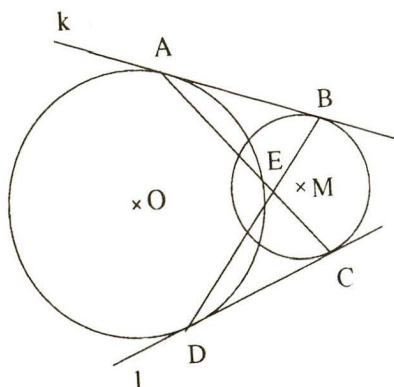
ומעגל N , בעל רדיוס נתון a ,

שמשיק לשני המעגלים הנתונים.

קטע המרכזים OM חותך את

המעגלים O ו- M , בנקודות P ו- T .

הוכח: $a \geq TP/2$



106*. נתונים שני מעגלים נחתכים

O ו-M, ושני המשיקים שלהם

k ו-l (A, B, C, D) נקודות

ההשקה). הוכח:

א. $BD = AC$

ב. $\angle DAE = \angle EBC$



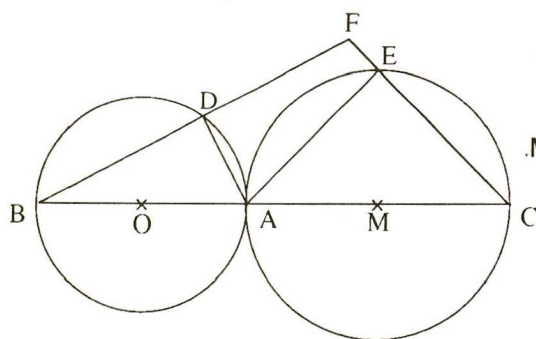
107*. המעגלים O ו-M משיקים ב-A.

AB ו-AC קטרים. D נקודה

על המעגל O, ו-E נקודה על M.

BD ו-CE נפגשים ב-F.

הוכח: $\angle DAE + \angle F = 180^\circ$



תשובות



1 א. $\alpha = 43^\circ, \beta = 86^\circ$; ב. $\alpha = 54^\circ, \beta = 108^\circ$; ג. $\beta = 50^\circ, BC = 50^\circ$

2 $42^\circ, 21^\circ, 126^\circ$ 3 א. $40^\circ, 20^\circ$; ב. 55°

4 א. $\alpha = 37.5^\circ, \beta = 35^\circ, \gamma = 75^\circ, \delta = 70^\circ$; ב. 215°

5 $80^\circ, 66^\circ, 34^\circ$ 6 א. $120^\circ, 160^\circ, 80^\circ$; ב. $160^\circ, 10^\circ, 10^\circ$

7 $114^\circ, 102^\circ, 78^\circ, 66^\circ$ 8 $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ ($\triangle ABD$);

$100^\circ, 30^\circ, 50^\circ$ ($\triangle AMD$).

9 $104^\circ, 114^\circ, 109^\circ, 99^\circ$ 10 $20^\circ, 50^\circ, 110^\circ$

11 $116^\circ, 16^\circ, 48^\circ$ 12 $28^\circ, 48^\circ, 104^\circ$ 15 7 ס"מ 17 60° , לא מתאים.

19 א. 43° 20 62° 22 א. $54^\circ, 32^\circ$; ב. $50^\circ, 50^\circ$

23 א. $70^\circ, 110^\circ, 110^\circ$; ב. $55^\circ, 125^\circ, 125^\circ$; ג. 90° כולן.

24 א. $32^\circ, 53^\circ$; ב. $35^\circ, 35^\circ$ 25 53° כולן.

28 $\triangle CFA, \triangle BFD$ 31 $73^\circ, 56^\circ$ 32 42° 34 $123^\circ, 57^\circ$

37 5 ס"מ 42 52° 54 $55^\circ, 90^\circ, 140^\circ$ 55 35° 56 75°

57 $64^\circ, 84^\circ$ 58 70° 59 60° 60 20° 66 3α 72 65°

73 $80^\circ, 80^\circ, 20^\circ$ 74 $47^\circ, 95^\circ$ 75 א. $28^\circ, 118^\circ$; ב. 62° כולן.

77 א. 84° ; ב. 114° 87 $20^\circ, 100^\circ, 60^\circ$ 88 60° 89 75° , לא.

מעגל חוסם ומעגל חסום

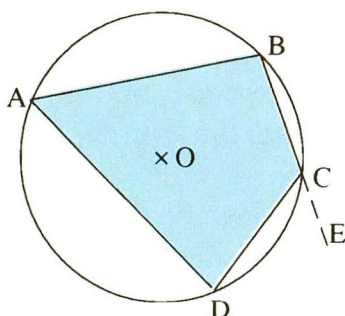
14. מרובע מיתרים

14.1 מרובע חסום במעגל, או מרובע מיתרים. הוא מרובע שקודקדיו נמצאים על היקף המעגל.

משפט



במרובע חסום במעגל, סכום הזוויות הנגדיות שוות ל- 180°



נתון	מעגל O מרובע מיתרים ABCD
צ"ל	$\angle A + \angle C = 180^\circ$ $\angle B + \angle D = 180^\circ$
הוכחה	הזוויות A ו-C היקפיות. לכן: $\angle A = \frac{\widehat{BCD}}{2}$ $\angle C = \frac{\widehat{BAD}}{2}$ ומחיבור השוויונים מתקבלת מסקנת המשפט.

14.2

מסקנה

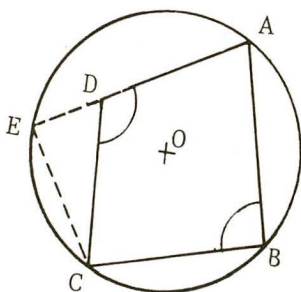
במרובע מיתרים הזווית החיצונית באחד מהקודקדים שווה לזווית הנגדית לקודקור זה. למשל, $\angle DCE = \angle A$! נמק

14.3 אם קיים מעגל, שעובר דרך ארבעת קודקדיו של מרובע, המרובע נקרא בר-חסימה.

משפט (הפוך)



אם במרובע, סכום שתי זוויות נגדיות הוא 180° , הרי קיים מעגל שעובר דרך ארבעת קודקדיו.



נתון מרובע ABCD ובו מתקיים:

$$\angle D + \angle B = 180^\circ$$

לפי סעיף 4.2 יש מעגל שעובר דרך

שלושה מקודקדיו, נניח A, B ו-C.

אילו הקודקוד D לא נמצא על מעגל זה,

הרי המשך AD יוצר מרובע מיתרים

AECB, שבו מתקיים $\angle E + \angle B = 180^\circ$

ואם נעזר בנתון, מקבלים $\angle D = \angle E$. זה לא יתכן, כי $\angle D$ חיצונית ל- $\triangle DEC$.

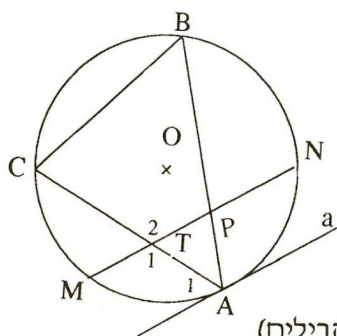
מסקנה: גם הנקודה D נמצאת על מעגל זה, כלומר, המרובע הוא בר-חסימה.

במקרה זה נבדקה האפשרות שהנקודה D נמצאת בתוך המעגל;

בדוק את המקרה שבו D נמצאת מחוץ למעגל!

14.4 דוגמה

הישר a משיק למעגל O, בנקודה A. המשולש ABC חסום במעגל זה. הוכח כי המיתר MN, המקביל למשיק a, חותך מהמשולש ABC, מרובע בר-חסימה.



$$\angle T_1 + \angle A_1 = 180^\circ \quad (\text{חד צדדיות בין מקבילים})$$

$$\angle T_1 = \angle T_2 \quad (\text{קודקדיות})$$

$$\angle A_1 = \angle B \quad (\text{נמק!})$$

$$\angle T_2 + \angle B = 180^\circ \quad \Leftarrow$$

$$\text{BPTC מרובע בר חסימה} \quad \Leftarrow$$

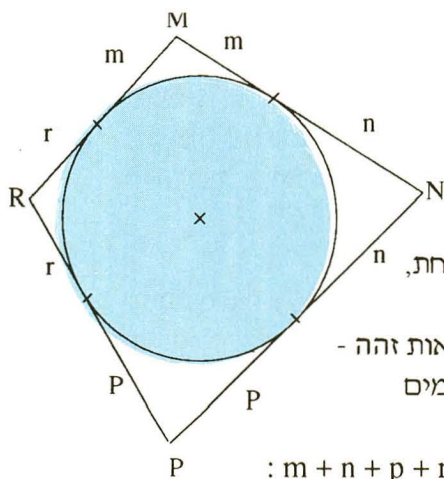
מ.ש.ל

15. מרובע משיקים

15.1 מרובע חוסם מעגל, או מרובע משיקים הוא מרובע, שארבע צלעותיו הן משיקים למעגל.

משפט.

במרובע משיקים, שווה סכום שתי צלעות נגדיות, לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות.



נתון	מעגל O מרובע משיקים MNPR
צ"ל	$MN + RP = MR + NP$
הוכחה	משיקים היוצאים מנקודה אחת, אורכייהם שווים. נסמן כל שני קטעים כאלה באות זהה - ראה שרטוט. כל אחד מהסכומים $(MN + RP)$ ו- $(MR + NP)$ מכיל את ארבעת הקטעים: $m + n + p + r$ מסקנה: $MN + RP = MR + NP$ מ.ש.ל.

15.2 המשפט הבא מציג תנאי, לאפשרות לחסום מעגל בתוך מרובע.

משפט (הפוך)

אם במרובע, שווה סכום שתי צלעות נגדיות, לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות, אפשר לחסום בו מעגל.



16. מצולעים משוכללים ומעגל

מצולע משוכלל הוא מצולע, שכל צלעותיו שוות זו לזו, וכל זוויותיו שוות זו לזו.

נבדוק מספר תכונות של מצולע משוכלל.

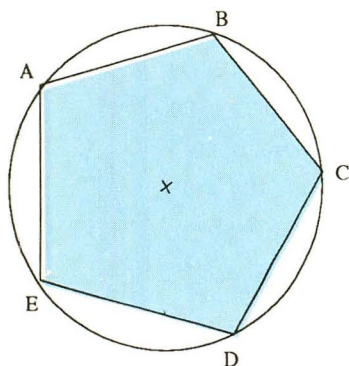
16.1 מצולע חסום במעגל

משפט



אם מחלקים מעגל לקשתות שוות ומחברים את נקודות החלוקה, מתקבל מצולע משוכלל.

הוכחה



לקשתות שוות במעגל, שייכים מיתרים שווים. לכן, כל **צלעות** המצולע **שוות** זו לזו.

זוויות המצולע החסום הן זוויות היקפיות; כל אחת מהן נשענת על $(n - 2)$ קשתות שוות, ועל כן, כל **זוויות** המצולע **שוות** זו לזו.

מ.ש.ל.

16.2 אפשר להוכיח גם טענה הפוכה:

משפט



כל מצולע משוכלל הוא בר חסימה. הוכח!

16.3 מצולע חוסם מעגל

מצולע חוסם מעגל הוא מצולע המורכב ממשיקים למעגל.

משפט

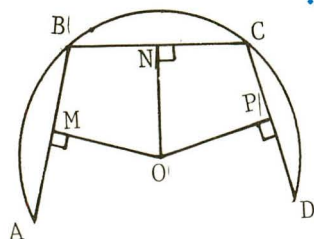
אם מחלקים מעגל לקשתות שוות ודרך נקודות החלוקה בונים משיקים למעגל, מתקבל מצולע משוכלל, שחוסם את המעגל.



נמק:

משפט (הפוך)

בכל מצולע משוכלל ניתן לחסום מעגל.



הוכח

ראינו, שכל מצולע משוכלל ניתן לחסום במעגל. צלעות המצולע הנ"ל BC, AB, CD וכו' הן מיתרים שווים במעגל החוסם.

רוחקיהם מהמרכז שווים:

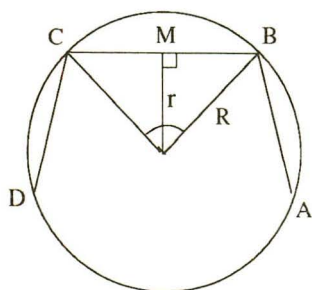
$$MO = NO = PO$$

לכן, הנקודות M, N, P וכו' נמצאות על מעגל אחד, שמרכזו O . צלעות המצולע משיקות למעגל זה. כלומר, המעגל חסום במצולע.

16.4

מסקנה

למעגל החוסם מצולע משוכלל ולמעגל החוסם בו יש מרכז משותף. הוכח!



שים לב!



חיבור קודקודי מצולע משוכלל.

בעל n צלעות למרכז המעגל החוסם אותו,

יוצר n משולשים שווים-שוקיים חופפים.

שוקיהם - רדיוס המעגל החוסם (R) ,

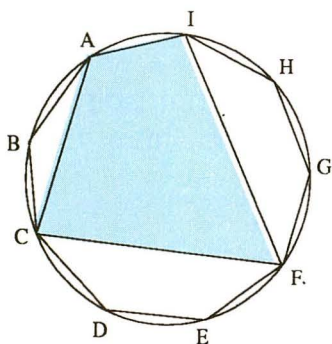
ובסיסיהם - צלע המצולע.

זווית הראש בכל משולש $360^\circ/n$

הגובה לבסיסו של כל משולש - OM

הוא רדיוס המעגל החוסם במצולע r .

המתושע ABCDEFGHI הוא מתושע משוכלל. חשב את זוויות המרובע AIFC.



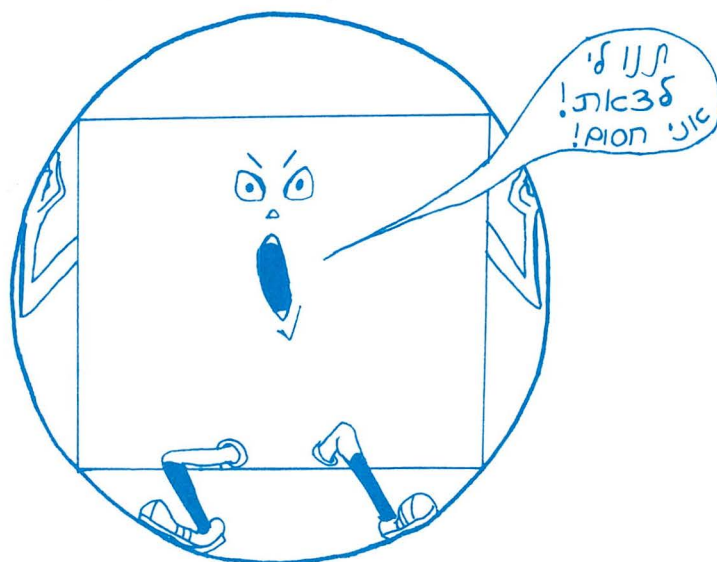
מצולע משוכלל ניתן לחסום במעגל.
הקשתות השייכות לצלעות המצולע
שוות זו לזו:

$$\widehat{AB} = \widehat{BC} = \dots = \widehat{AI} = 360^\circ / 9 = 40^\circ$$

$$\angle CAI = 120^\circ \text{ לכן}$$

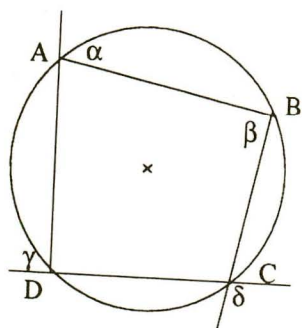
ובאותו אופן מקבלים:

$$\angle ACF = 80^\circ, \angle IFC = 60^\circ, \angle AIF = 100^\circ$$



תרגילים

סעיפים 14.1-14.2



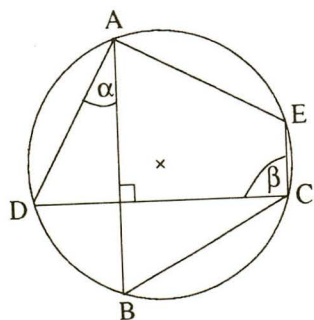
1. המרובע ABCD חסום במעגל

חשב את זוויות המרובע אם:

א. $\beta = 80^\circ$; $\alpha = 130^\circ$

ב. $\gamma = 75^\circ$; $\alpha = 110^\circ$

ג. $\delta = 100^\circ$; $\gamma = 78^\circ$

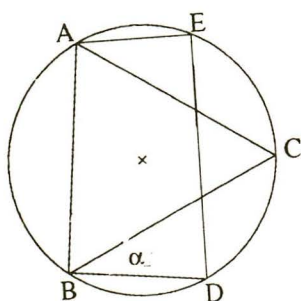


2. בשרטוט נתון: $AB \perp CD$,

$\beta = 78^\circ$; $\alpha = 33^\circ$

חשב את הזוויות BAE,

ABC ו-E.



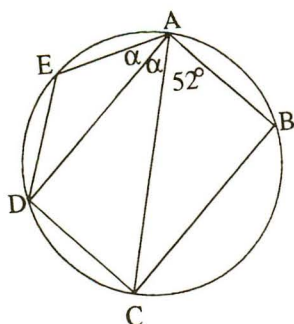
3. המשולש ABC החסום במעגל הוא

שווה צלעות, D נקודה על הקשת BC

ו-E נקודה על הקשת AC. נתון

$\alpha = 28^\circ$

חשב את הזוויות BDC ו-AED

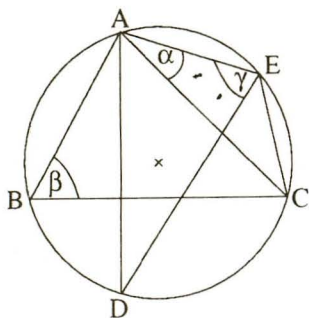


4. ABCD מלבן חסום במעגל.

התיחס לנתונים שבשרטוט

וחשב את זוויות המרובע

AEDC.



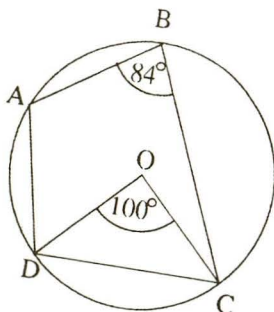
5. המיתרים AD ו-BC שבמעגל O מאונכים זה לזה.

נתון:

$$\alpha = 32^\circ, \beta = 65^\circ, \gamma = 48^\circ$$

חשב את הזוויות ADC,

BAE, DCE



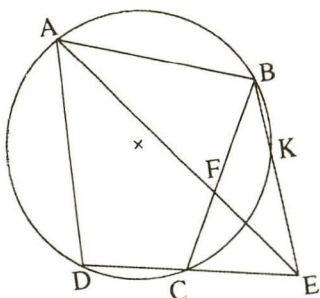
6. ABCD מרובע חסום במעגל O,

A אמצע הקשת BD.

העזר בנתונים ששרטוט

וחשב את הזוויות BCD

ו-ADO.



7. המרובע ABCD חסום במעגל.

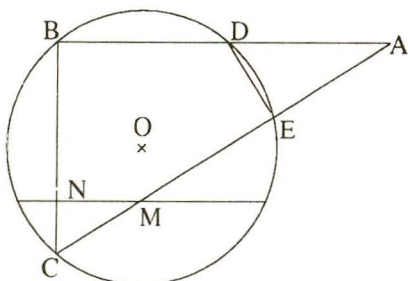
חוצה הזווית A חותך את

הצלע BC בנקודה F ואת המשך

DC ב-E. נתון $BF = EF$,

$$\angle ABC = 92^\circ, \angle BCD = 96^\circ$$

חשב את זוויות המשולש BCE.



8. המעגל O עובר דרך הנקודות

B ו-C של המשולש ABC

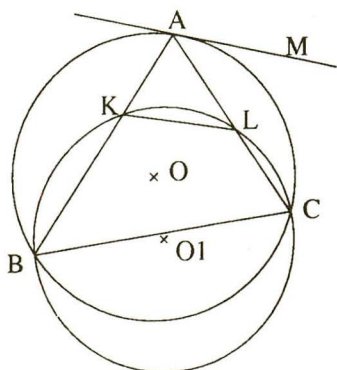
וחותך את צלעות המשולש

בנקודות D ו-E.

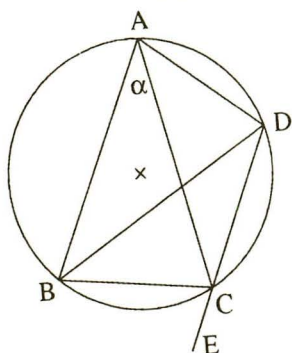
נתון: $MN \parallel BD$.

הוכח כי זוויות המשולש ADE שוות

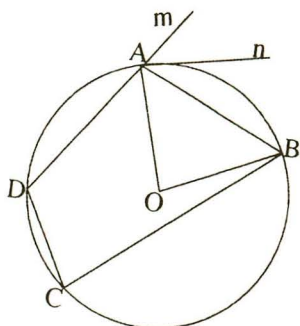
בהתאמה לזוויות המשולש MCN.



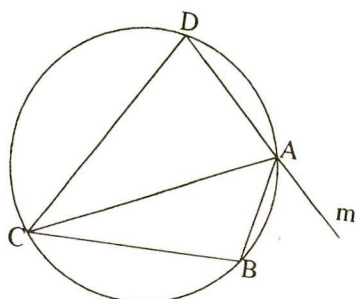
9. $\triangle ABC$ חסום במעגל O.
 Am משיק למעגל O בנקודה A.
 דרך קצות הצלע BC עובר מעגל
 נוסף החותך את AB ב-K ואת
 AC ב-L. נתון $\angle MAL = 50^\circ$
 חשב את הזווית KLC.



10. המרובע ABCD חסום במעגל.
 נתון $\angle BCE = 2\alpha$ (ראה שרטוט)
 הוכח כי המשולש BCD הוא
 שווה שוקיים.

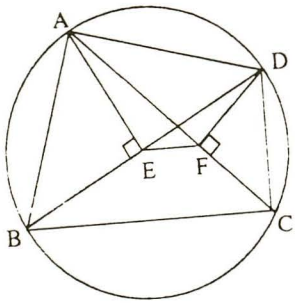


11. ABCD מרובע חסום במעגל O,
 Am המשך הצלע AD.
 נתון: $\angle AOB = \angle C$
 הוכח כי המשיק למעגל
 בנקודה A חוצה את
 הזווית mAB.



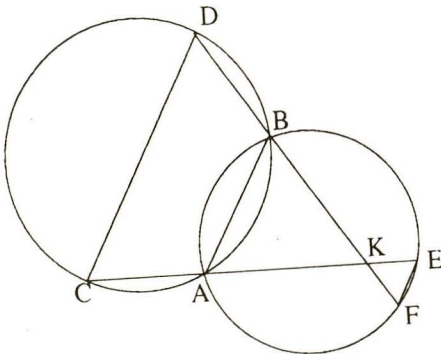
12. המרובע ABCD חסום במעגל
 ונתון $\angle MAC = \angle B$
 (mAD - קו ישר).
 הוכח כי הצלע DC שווה לאלכסון
 AC.

13. המשולש ABC חסום במעגל. BD ו-CE גבהים במשולש (D על AC, E על AB),
 ו-AT משיק למעגל בנקודה A. הוכח: $DE \parallel AT$.



14. המרובע ABCD חסום במעגל.

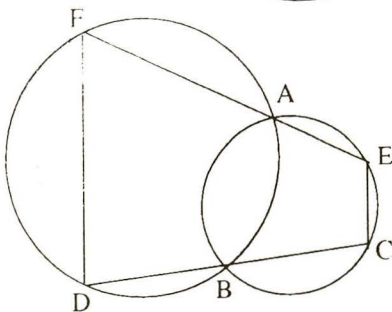
מהנקודות A ו-D הורדו
אנכים AE ו-DF, לאלכסונים
BD ו-AC בהתאמה.
הוכח: $EF \parallel BC$.



15*. לשני מעגלים מיתר משותף AB.

דרך קצות AB עוברים שני
ישרים CE ו-DF, הנחתכים
בנקודה K.

הוכח כי זוויות $\triangle KFE$ שוות
בהתאמה לזוויות $\triangle KCD$.



16*. דרך נקודות החיתוך A ו-B של

שני מעגלים, עוברים הישרים
CD ו-EF.
הוכח: EFDC טרפז.

סעיף 14.3

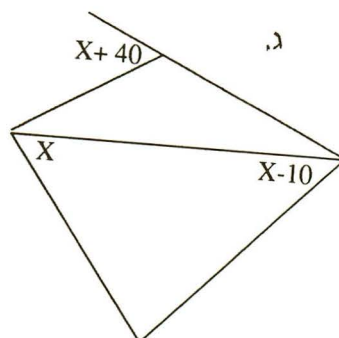
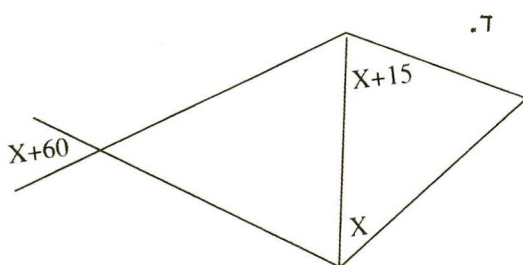
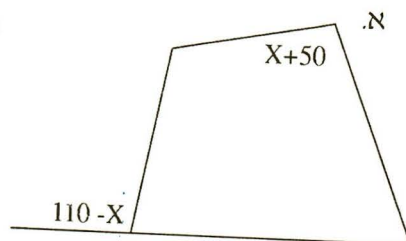
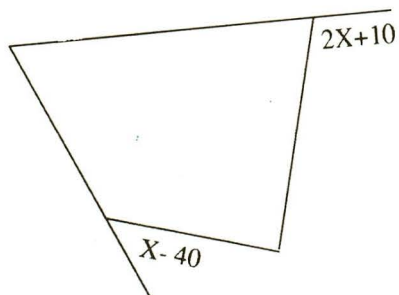
17. האם ניתן לחסום במעגל את המרובע ABCD, שזוויותיו $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

כאשר נתון:

α	β	γ	δ	
73°	50°	107°	130°	א
73°	107°	50°	130°	ב
60°	120°	60°	120°	ג
110°	70°	70°	110°	ד

18. מה צריך להיות ערכו של X כדי שהמרובע המשורטט יהיה בר חסימה.

(הנתונים במעלות)



19. האם כל מקבילית היא מרובע בר חסימה?

אילו מבין המרובעים, שהם מקרים פרטיים של המקבילית, ניתן לחסום במעגל? נמק!

20. האם ניתן לחסום כל דלתון במעגל. באיזה תנאי אפשרי הדבר?

21. איזה סוג של טרפז ניתן לחסום במעגל? הוכח!

22. ABC משולש שווה שוקיים

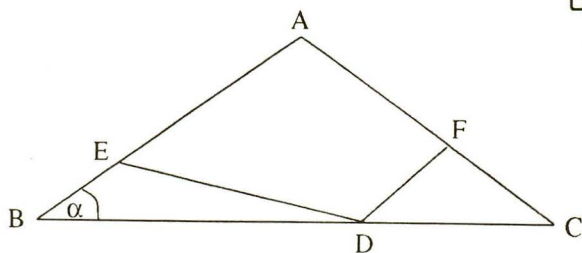
$(AB = AC)$. D נקודה על

BC ונתון: $\angle B = \alpha$

$\angle EDF = 2\alpha$

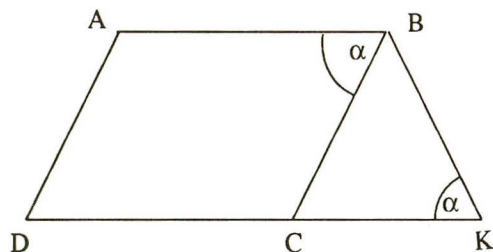
הוכח כי $AEDF$ מרובע

בר חסימה.

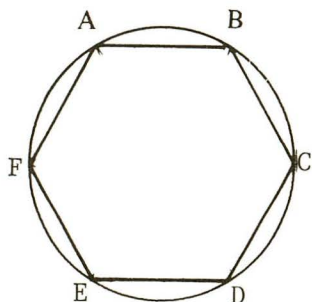


23. ABC משולש שווה שוקיים (B - קודקוד הראש). M נקודה על AB ו- N על BC. נתון: $AM = CN$. הוכח כי AMNC מרובע בר-חסימה.

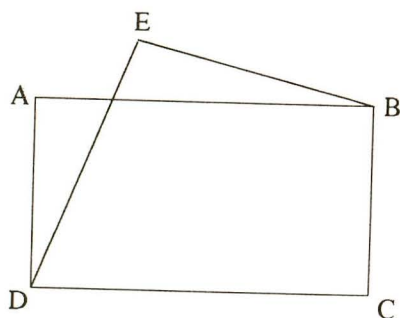
24. הזווית B, במשולש ABC, היא בת 60° . חוצי הזוויות AD ו- CE נחתכים בנקודה F. הוכח, כי המרובע BEFD הוא בר-חסימה.



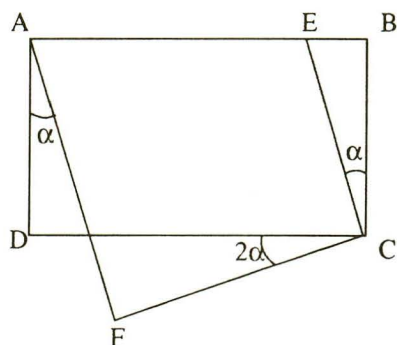
25. ABCD מקבילית, $\angle B = \alpha$. הקטע BK יוצר עם המשך DC זווית K השווה ל- α . הוכח ABKD מרובע בר חסימה.



26. ABCDEF משושה משובלל.
א. הוכח כי ארבע הנקודות A, B, D ו- E נמצאות על מעגל אחד.
ב. האם אפשר למצא מרובעים נוספים שקודקדיהם בקודקדי המשושה, שהם בני חסימה? נמק!



27. ABCD מלבן. נתון $\angle ADE = \angle ABE$. הוכח: EBCD מרובע בר חסימה.



28. ABCD מלבן.

התיחס לנתונים שבשירטוט

והוכח כי AECF

מרובע בר חסימה.

29. המשולש ABC שוויון. E נקודה על BC ו-D נקודה על AC, כך ש: $AD = EC$

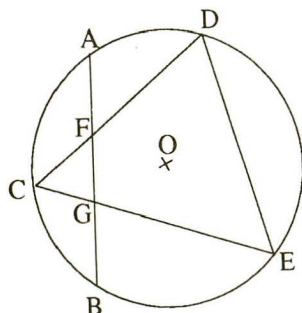
K נקודת המפגש של BD ו-AE. הוכח: EKDC מרובע בר-חסימה.



30*. O מרכז המעגל החסום במשולש ABC. M מרכז המעגל החסום במשולש

"מבחוץ" (משיק לצלע BC ולהמשכי הצלעות AB ו-AC).

הוכח כי, המרובע OBMC בר-חסימה.



31. C אמצע הקשת AB במעגל O.

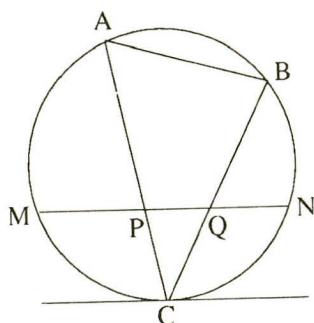
CD ו-CE - שני מיתרים,

החותכים את AB בנקודות F

ו-G.

הוכח כי, המרובע FDEG

הוא מרובע בר חסימה.



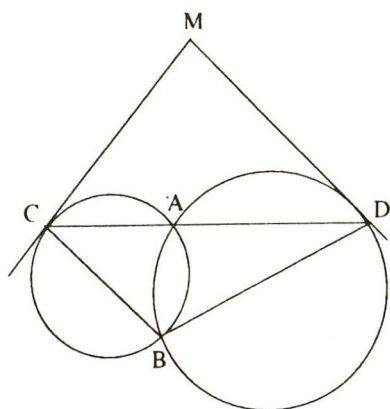
32. המשולש ABC חסום במעגל

המיתר MN מקביל למשיק

למעגל בנקודה C.

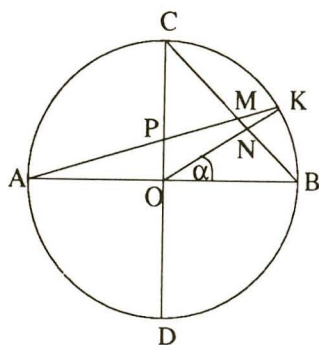
הוכח, כי APQB

מרובע בר חסימה.

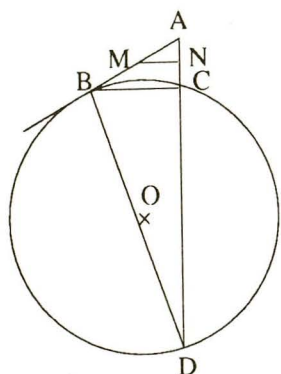


33. שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B. CD עובר דרך A. המשיקים לשניהם מעגלים, האחד ב-C והשני ב-D נחתכים ב-M.

הוכח: המרובע BCMD בר-חסימה.

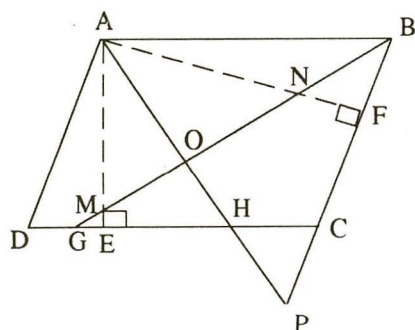


34. AB ו-CD קטרים מאונכים, במעגל O. K נקודה על הקשת BC. המיתר BC חותך את AK ב-M, ואת OK ב-N. מה צריך להיות הגודל של α , כדי שהמרובע PMNO יהיה בר-חסימה.



- 35*. מהנקודה A יוצאים שני ישרים: אחד משיק למעגל O, בנקודה B והאחר חותך את המעגל בנקודות C ו-D. נתון: $MN \parallel BC$. הוכח שהמרובע MNDB בר-חסימה.

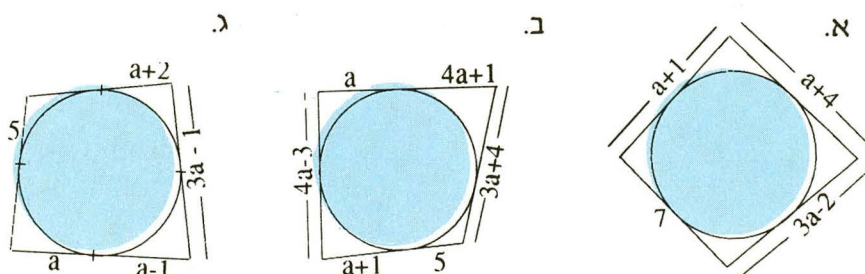
36*. הוכח כי את המרובע MNDB שבתרגיל הקודם לא ניתן לחסום במעגל.



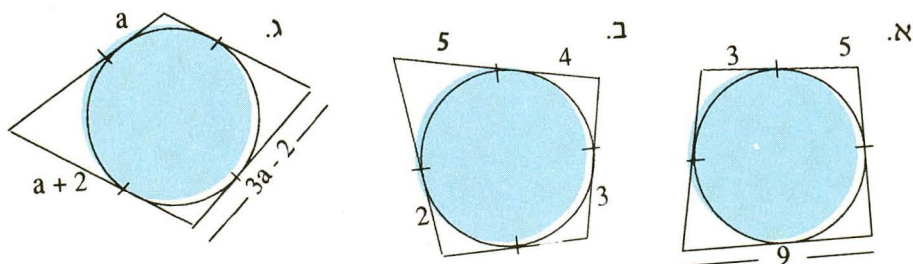
37. AF ו-AE גבהים במקבילית ABCD. AH ו-BG חוצי הזוויות A ו-B, בהתאמה. הוכח כי המרובעים MOHE ו-ONFP הם בני חסימה.

סעיף 15.1

38. חשב את צלעות המרובע:



39. חשב את היקף המרובעים הבאים:



40. המעגל O חסום בטרפז שוי"ש $ABCD$ ($BC \parallel AD$). רדיוס המעגל 4 ס"מ,

$\angle B = 150^\circ$. חשב את אורך השוק ואת היקף הטרפז.

41. בטרפז שוי"ש חסום מעגל. הפרש הבסיסים שווה ל- 4 ס"מ והזווית

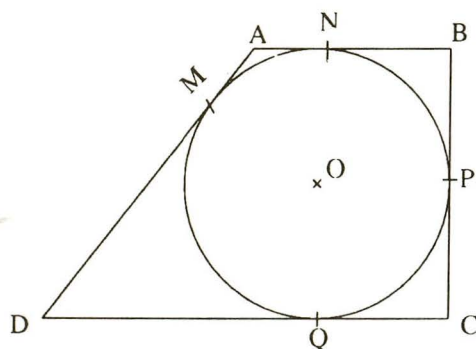
החדה 60° . חשב את סכום הבסיסים.

42. בטרפז $ABCD$ חסום מעגל. הוכח כי, קטע האמצעים של הטרפז שווה

לממוצע החשובני של שוקיו.

43. בתנאי התרגיל הקודם, הטרפז הוא שוי"ש. מהי המסקנה המתקבלת לגבי

קטע האמצעים?



44* מעגל O חסום בטרפז ישר-זווית

ABCD. MNPQ נקודות ההשקה.

נתון: $\angle D = 30^\circ$, $AM = 2$ ס"מ,

$DM = 8$ ס"מ.

חשב את אורך הבסיס DC,

ואת היקף הטרפז.

45. המעגל O חסום במרובע ABCD. הוכח:

$$\angle AOB + \angle DOC = \angle AOD + \angle BOC$$



46* הוכח: במרובע משיקים כל חוצי הזוויות נפגשים בנקודה אחת. מהי נקודה זו?

סעיף 15.2

47. צלעות המרובע ABCD - a, b, c, d - נתונות בטבלה הבאה.

באילו מהמקרים ניתן לחסום במרובע זה מעגל?

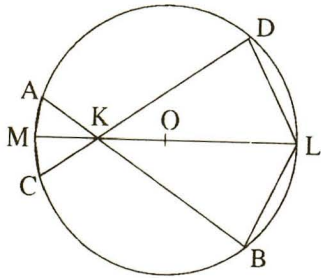
	d	c	b	a
א	8	9	7	6
ב	9	8	7	6
ג	5	4	5	4
ד	5	5	4	4

48. א. איזה סוג מרובע מופיע בסעיף ג', שבתרגיל הקודם?

ב. נסח בצורה כללית את התשובה לסעיף ד', של התרגיל הנ"ל.

49. באילו מהמקביליות המיוחדות ניתן לחסום מעגל? נמק!

49. נסח בצורה כללית את התשובה לתרגיל 47 ד.



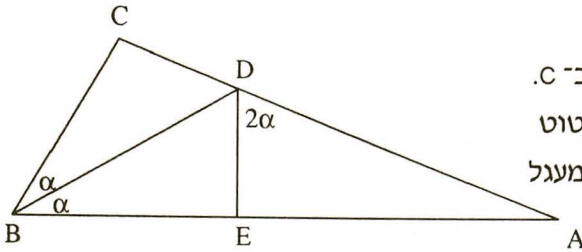
50. AB ו- CD שני מיתרים הנחתכים

בנקודה K .

הקוטר ML חוצה את הזווית A .

הוכח: בכל אחד מהמרובעים

$KDLB$ ו- $AKCM$ ניתן לחסום מעגל.

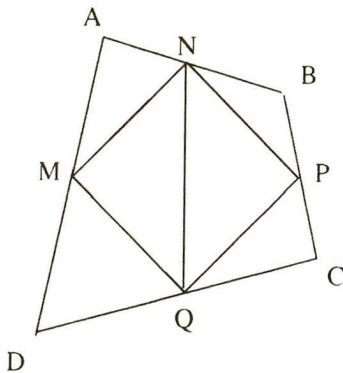


51* ABC משולש ישר זווית ב- C .

התייחס לנתונים שבשרטוט

והוכח, שאפשר לחסום מעגל

במרובע $CBED$



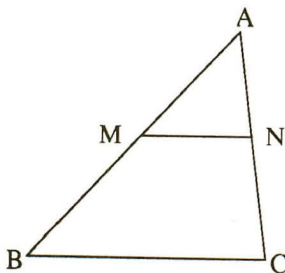
52* Q, M, N, P אמצעי צלעות

המרובע $ABCD$.

NQ חוצה את הזווית MQP .

הוכח: במרובע $MNPQ$ ניתן

לחסום מעגל.



53* במשולש ABC גדול סכום הצלעות

AB ו- AC פי 3 מהצלע BC .

MN קטע האמצעים במשולש.

הוכח: אפשר לחסום מעגל

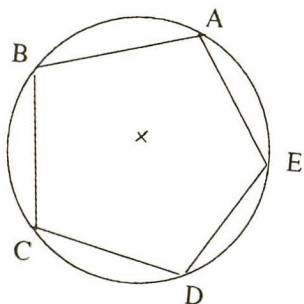
במרובע $MNCB$.

סעיף 16

54. חשב את גודל הזווית במצולע משוכלל שמספר צלעותיו:

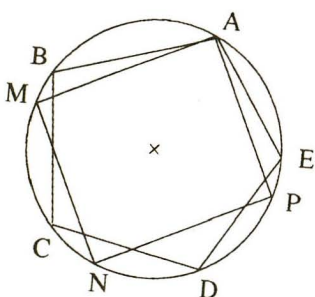
א. 5 ; ב. 9 ; ג. 12

55. מהו מספר הצלעות במצולע משוכלל בעל זווית, השווה ל-1.8d?



56. נתון מחומש משוכלל ABCDE.

חשב את הזוויות CAD ו-ABD.



57. במעגל נתון, חסומים מחומש

משוכלל ABCDE וריבוע AMNP.

חשב את זוויות המשולשים

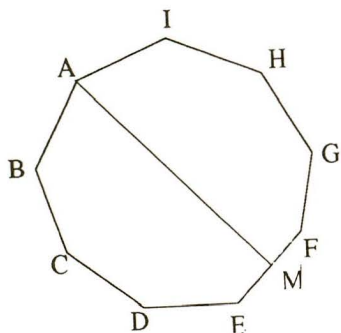
ABM ו-ACN.

58. במעגל חסום מחומש משוכלל ABCDE (ראה שרטוט של תרגיל 56).

הוכח כי, האלכסון AD מקביל לצלע BC.

59. במעגל חסומים מחומש משוכלל ABCDE ומשולש שווה צלעות AMN.

הוכח: $MN \parallel CD$.



60. המצולע ABCDEFGHI הוא

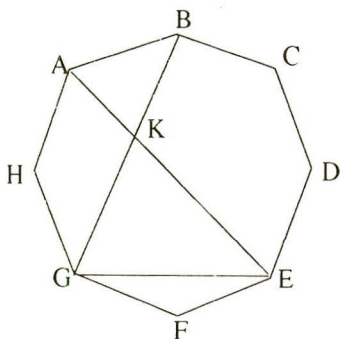
מתושע משוכלל. חוצה הזווית A

חותך את הצלע EF בנקודה M.

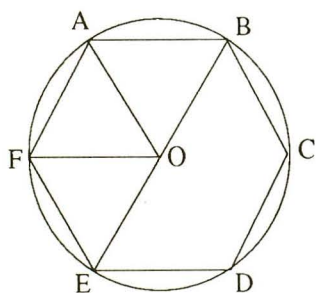
הוכח:

א. $EM = MF$

ב. $AM \perp EF$

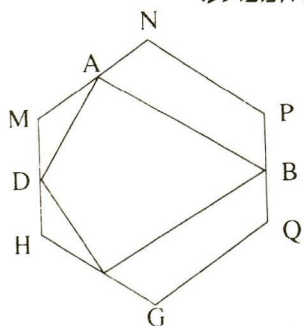


61. המתומן (8 צלעות) שבשרטוט הוא משוכלל.
הוכח כי המשולשים ABK ו- KEG הם משולשים שווי שוקיים.



62. המשושה המשוכלל $ABCDEF$ חסום במעגל. הוכח:
א. צלע המצולע שווה לרדיוס
ב. האלכסון BE עובר דרך מרכז המעגל O .
ג. האלכסון BE חוצה את הזווית E .

63. הוכח: במצולע משוכלל, בעל מספר זוגי של צלעות, האלכסון הגדול ביותר, עובר דרך מרכז המעגל החוסם את המצולע.



- 64*. הנקודות A, B, C ו- D הן אמצעי צלעות במשושה משוכלל. הוכח:
א. $ABCD$ מרובע בר חסימה.
ב. אפשר לחסום מעגל במרובע $ABCD$.



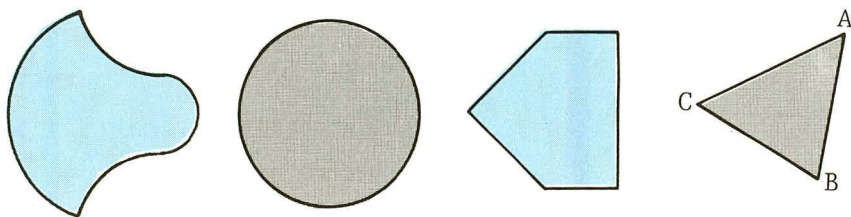
תשובות



- 1) א. $50^\circ, 80^\circ, 130^\circ, 100^\circ$; ב. $70^\circ, 75^\circ, 110^\circ, 105^\circ$; ג. $80^\circ, 78^\circ, 100^\circ, 102^\circ$.
2) $69^\circ, 57^\circ, 123^\circ$ (3) $120^\circ, 92^\circ$ (4) $76^\circ, 128^\circ, 104^\circ, 52^\circ$.
5) $65^\circ, 124^\circ, 81^\circ$ (6) $68^\circ, 56^\circ$ (7) $84^\circ, 73^\circ, 23^\circ$.
9) 130° (17) א. כן; ב. לא; ג. לא; ד. כן. (18) $30^\circ, 70^\circ, 50^\circ, 45^\circ$.
34) 30° (38) א. 7, 8, 5; ב. 12, 22, 31, 21; ג. 7, 3, 5, 9.
39) א. 34; ב. 28; ג. 10a. (40) 16 ס"מ, 64 ס"מ. (41) 8 ס"מ.
44) 10.5 ס"מ, 30 ס"מ. (47) א. כן; ב. לא; ג. לא; ד. כן.
48) א. מקבילית. (54) א. 108° ; ב. 140° ; ג. 150° . (55) 20.
56) $36^\circ, 72^\circ$ (57) $9^\circ, 36^\circ, 135^\circ$ (ΔABM); $18^\circ, 72^\circ, 90^\circ$ (ΔACN).

פרק ג: שטחים

שטח מוגדר כגודל של חלק המישור, הנמצא בתוך קו סגור.

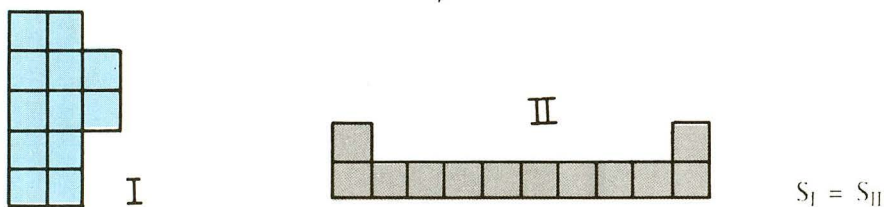


נסמן שטח באות S , בתוספת אותיות המציינות את הצורה שהוא מתאר. למשל, שטח המשולש ABC יצוין: S_{ABC} .

יחידת שטח מוגדר שטחו של ריבוע, שאורך צלעו יחידת אורך אחת (סמ"ר, מ"ר, וכו').

שתי צורות הנדסיות הן **צורות שוות-שטח**, אם הן מכילות מספר שווה של יחידות שטח.

למשל, הצורות המתוארות ב-I וב-II הן שוות-שטח:



המלבן והריבוע הן צורות הנדסיות, שניתן למדוד את שטחיהן. כלומר, ניתן לחלק אותן לריבועים, שכל אחד הוא יחידת שטח אחת, ולספור את מספר הריבועים שהם מכילים.

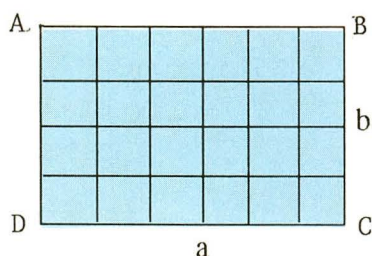
שטח של צורות הנדסיות אחרות מחשבים בעזרת נוסחאות, שמתקבלות ע"י השוואת שטחיהן לשטח מלבן, או לשטח צורה הנדסית אחרת, שאותו כבר חישבנו.

1. המלבן והריבוע

משפט

1.1

שטח המלבן שווה למכפלת אורכו ברוחבו.



$$S_{ABCD} = a \cdot b \quad \text{כלומר}$$

כאשר a ו- b מציינים את אורכו ורוחבו של המלבן.

הוכחה

נניח ש- a ו- b הם מספרים שלמים. נחלק את האורך ואת הרוחב לפי יחידת האורך המודדת אותם, ודרך נקודות החלוקה נעביר מקבילים לצלעות המלבן. באופן כזה, חולק המלבן לריבועים - יחידות שטח. היות שמספר הריבועים הוא ab , יהיה שטח המלבן

$$S_{ABCD} = a \cdot b$$

אם a ו- b אינם מספרים שלמים, נקטין את מידת האורך המודדת אותם, עד כדי אפשרות שהם יבוטאו ע"י מספרים שלמים. מ.ש.ל.

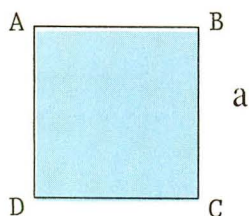
משפט

1.2

שטח ריבוע שאורך צלעו a , שווה לריבוע אורך הצלע.

כלומר:

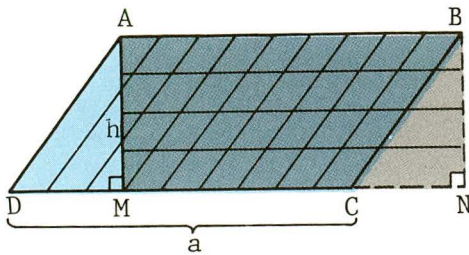
$$S_{ABCD} = a^2$$



2. המקבילית

2.1 משפט

שטח מקבילית שווה למכפלת אורך אחת מצלעותיה באורך הגובה שלה.

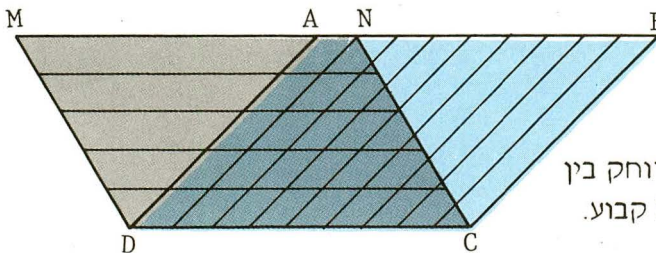


נתון	מקבילית ABCD $AM \perp DC$
צ"ל	$S_{ABCD} = a \cdot h$
הוכחה	ב"ע: $BN \perp DC$ $\triangle ADM \cong \triangle BCN$ (נמק!) $S_{ADM} = S_{BCN} \Leftarrow$ וע"י הוספת, S_{ABCM} לשני האגפים, מקבלים, $S_{ABCD} = S_{ABNM}$ לכן: $S_{ABCD} = AM \cdot MN = AM \cdot DC = a \cdot h$ מ.ש.ל.

2.2 מסקנות

מסקנה א

מקביליות בעלות צלע אחת משותפת והצלעות הנגדיות לה מונחות על ישר אחד, שוות בשטחיהן.

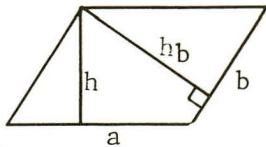


כלומר:
 $S_{ABCD} = S_{MNCD}$

ההסבר מתבסס על כך שרוחק בין ישרים מקבילים הוא גודל קבוע.

מסקנה ב

אם צלעות המקבילית הן a ו- b והגבהים שלהן h_a ו- h_b , בהתאמה, מתקבל הקשר $a \cdot h_a = b \cdot h_b$



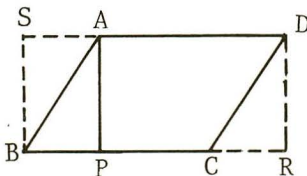
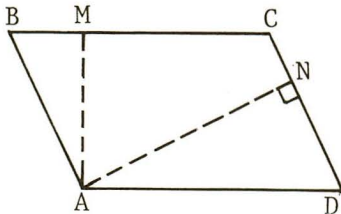
נימוק:
שתי המכפלות מבטאות
שטח של אותה מקבילית.

2.3



שים לב!

- כדי לשרטט את שני הגבהים השונים של מקבילית:
- התחל מקודקד של זווית קהה, למשל A;
- שרטט אנכים לשתי הצלעות הנגדיות לקודקוד זה.



הימנע מהטעות הנפוצה של שרטוט גבהים AP, DR ו-BS, שהם גבהים זהים.

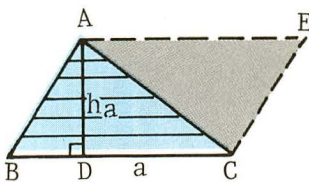
3. המשולש

משפט

3.1

שטח משולש שווה למחצית מכפלת אורך צלע המשולש בגובה

שלה. $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$



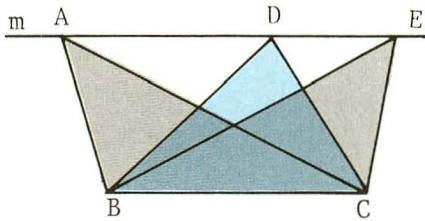
ΔABC $AD \perp BC$	נתון
$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD$	צ"ל
בי"ע: $CE \parallel AB, AE \parallel BC$ $\Leftarrow AECB$ מקבילית $\Leftarrow S_{ABC} = S_{AEC}$ (כי הם חופפים) $\Leftarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{AECB} = \frac{1}{2} a \cdot h_a$	הוכחה

מ.ש.ל.

3.2 מסקנות

מסקנה א

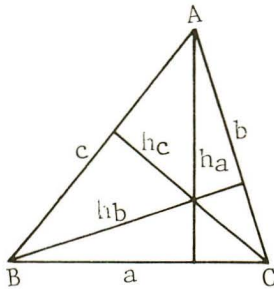
כל המשולשים בעלי צלע משותפת, כשהקודקדים הנגדיים לצלע זו מונחים על ישר שמקביל לה, הם שווים שטח.



כלומר:
אם $m \parallel BC$
אז: $S_{ABC} = S_{DBC} = S_{EBC}$
נמק!

מסקנה ב

מכפלת כל צלע של משולש, בגובה שלה הוא גודל קבוע.

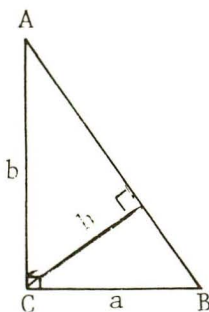


$$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$$

נמק!

מסקנה ג

שטח של משולש ישר זווית שווה למחצית מכפלת הניצבים.



$$S = 1/2 a \cdot b$$

נמק!

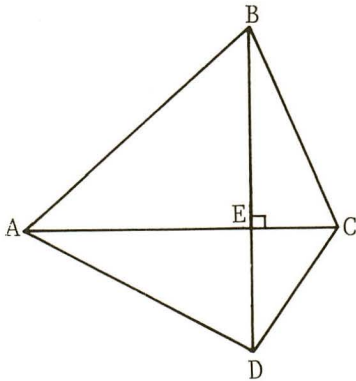
ממסקנות ב' ו-ג' מתקבל:

$$a \cdot b = c \cdot h$$

מסקנה שימושית כשלעצמה.

מסקנה ד

שטח מרובע, שאלכסוניו מאונכים זה לזה, שווה למחצית מכפלת האלכסונים.

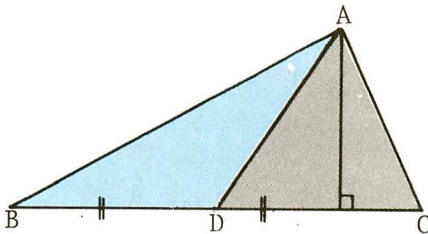


נתון	מרובע ABCD $AC \perp BD$
צ"ל	$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$
הוכחה	$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BE$ $S_{ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot DE$ $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BE + \frac{1}{2} AC \cdot DE =$ $= \frac{1}{2} AC \cdot (BE + DE) = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ מ.ש.ל.

בעזרת מסקנה זו אפשר לחשב שטח של דלתון ושל מעוין.

מסקנה ה

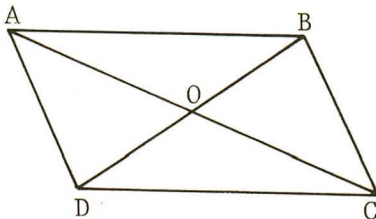
התיכון מחלק את המשולש לשני משולשים שווי-שטח.



כלומר,	
$BD = DC$	אם
$S_{ABD} = S_{ACD}$	אז:

מסקנה ו

אלכסוני המקבילית מחלקים אותה לארבעה משולשים שווי-שטח.

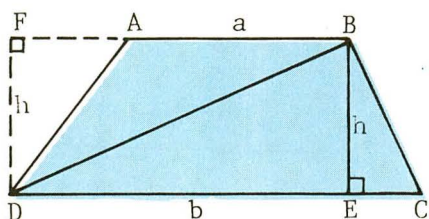


אם ABCD מקבילית,	
	אז:
$S_{AOB} = S_{BOC} = S_{COD} = S_{AOD}$	

4. הטרפז

4.1 משפט

שטח הטרפז שווה למחצית מכפלת סכום הבסיסים בגובה:



$$S_{ABCD} = 1/2 (a + b) \cdot h$$

הוכחה

בסיסי הטרפז ABCD מקבילים.

לכן, המרחק ביניהם הוא גודל

קבוע: $FD = BE = h$

האלכסון BD מחלק את טרפז

לשני משולשים, שסכום שטחיהם שווה לשטח הטרפז:

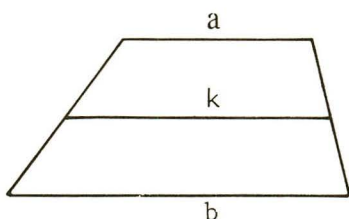
$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = 1/2 a \cdot h + 1/2 b \cdot h = 1/2 (a + b) \cdot h$$

מ.ש.ל.

4.2 מסקנות

מסקנה א

שטח הטרפז שווה למכפלת קטע האמצעים של הטרפז בגובהו.



הוכחה

קטע האמצעים בטרפז

שווה למחצית סכום בסיסיו.

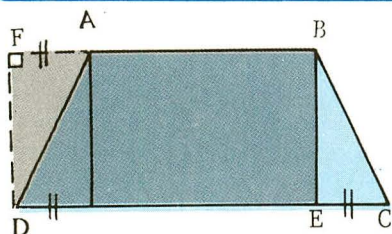
$$k = \frac{a + b}{2}$$

$$S = 1/2 (a + b) \cdot h = k \cdot h \quad \text{לכן}$$

מסקנה ב

שטח טרפז שווה-שוקיים ABCD, שווה למכפלה DE·BE, כאשר BE הוא גובה

$$S_{ABCD} = DE \cdot BE \quad \text{בטרפז:}$$



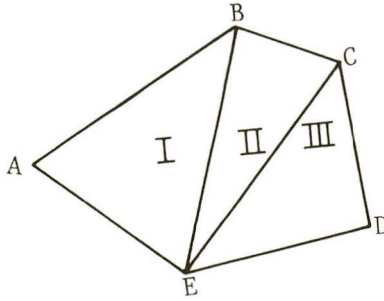
הוכחה

האנך DF לצלע AB יוצר מלבן FBED,

השווה בשטחו לשטח הטרפז (נמק!)

ושטחו שווה ל-DE·BE.

5. המצולע



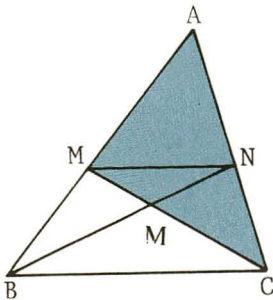
שטח מצולע ניתן לחשב
ע"י חלוקתו למשולשים.

$$S_{ABCDE} = S_I + S_{II} + S_{III}$$

6. דוגמאות

דוגמה א'

במשולש ABC , MN מקביל ל- BC . הוכח כי המשולשים ANB ו- AMC שווי-שטח.

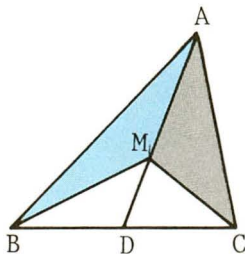


$\triangle ABC$ $MN \parallel BC$	נתון
$S_{ABN} = S_{AMC}$	צ"ל

הוכחה
 $S_{MNB} = S_{MNC}$ (לפי 3.2 א').
 אם נחבר לשני אגפי השוויון
 את S_{AMN} נקבל:
 $S_{ABN} = S_{ACM}$
 מ.ש.ל.

דוגמה ב'

M נקודה על התיכון AD של משולש ABC . הוכח כי שטח המשולש AMB , שווה
לשטח המשולש AMC .



ה/כח/ה

AD תיכון במשולש ABC ,

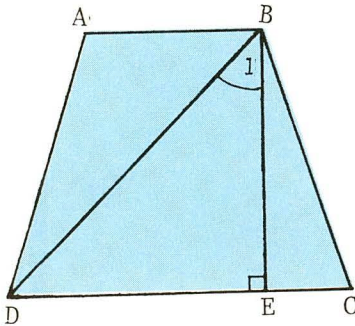
$$S_{ABD} = S_{ACD} \quad \text{לכן}$$

MD תיכון במשולש MBC ,

$$S_{MBD} = S_{MCD} \quad \text{לכן}$$

ומחסור השוויונים מתקבל $S_{AMB} = S_{AMC}$
מ.ש.ל.

חשב שטחו של טרפז שווה-שוקיים, שגובהו שווה ל-16 ס"מ והזווית בין הגובה לאלכסון היא 45° .



פתרון

לפי המסקנה האחרונה:

$$S_{ABCD} = DE \cdot BE$$

במשולש DBE נתון:

$$\angle E = 90^\circ, \angle B1 = 45^\circ$$

לכן, $\triangle BDE$ שוו"ש,

כלומר: $DE = BE = 16$ ס"מ

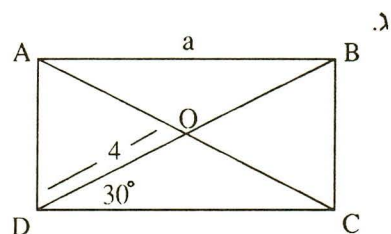
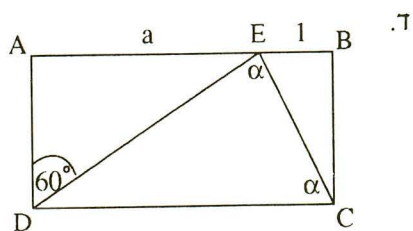
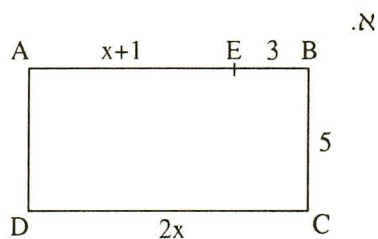
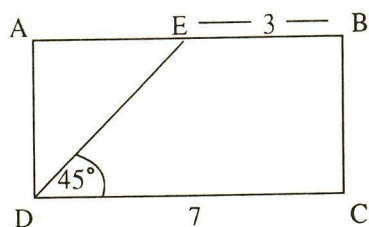
$$S_{ABCD} = DE \cdot BE = 16 \cdot 16 = 256 \text{ סמ"ר}$$



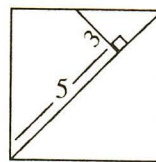
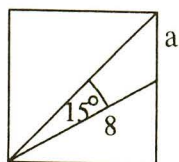
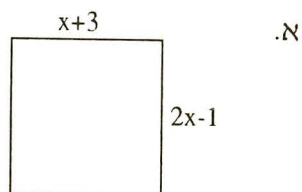
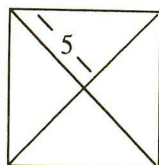
תרגילים

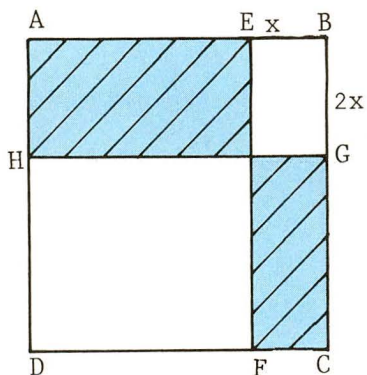
סעיף 1

1. חשב את שטח המלבן:

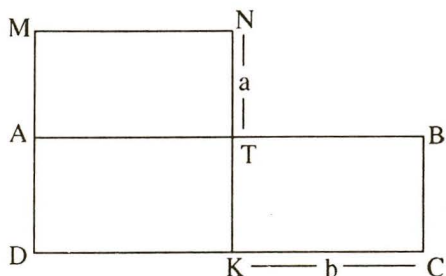


2. חשב את שטח הריבוע:





3. בריבוע שאורך צלעו 7 ס"מ
הקצו קטע $BE = x$ וקטע $BG = 2x$,
והעבירו מקבילים EF ו- GH
לצלעות הריבוע.
בטא באמצעות x את השטח
המקווקו S .



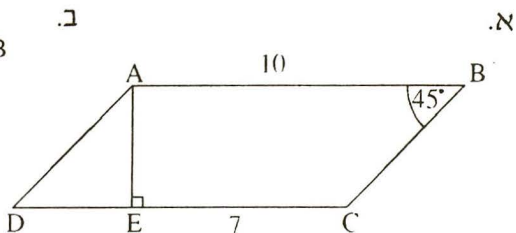
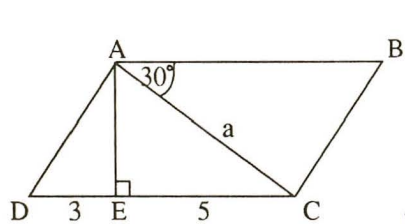
4. ABCD מלבן שאורך הצלעות שלו
2 ס"מ ו- 8 ס"מ.
הריבוע MNKD שווה בשטחו
למלבן. חשב את a ואת b .
מה תוכל לומר על שטחי
המרובעים MNTA ו- KTBC.

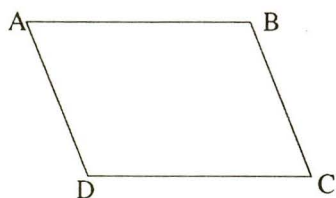
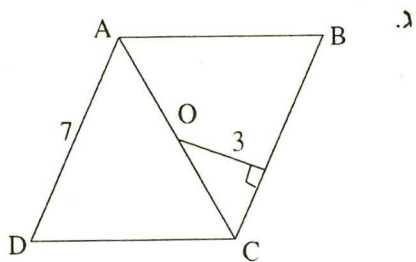
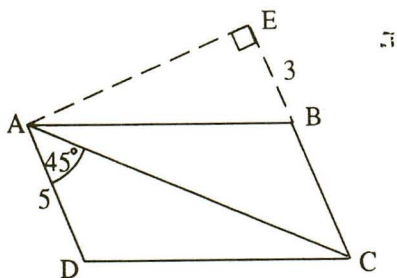
5. אם נגדיל צלע אחת של ריבוע ב- 3 ס"מ ואת האחרת נקטין ב- 5 ס"מ נקבל
מלבן ששטחו קטן ב- 29 סמ"ר משטח הריבוע. חשב את צלע הריבוע.

6. אם מוסיפים למלבן ריבוע הבנוי על הרוחב שלו, מתקבל מלבן ששטחו
36 סמ"ר. אם מוסיפים למלבן הנתון ריבוע הבנוי על האורך שלו, מתקבל
מלבן ששטחו 45 סמ"ר. מהם ממדי המלבן הנתון.

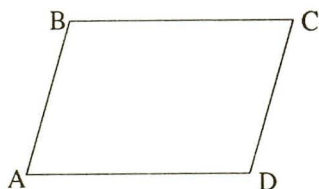
סעיף 2

7. חשב את שטח המקבילית, לפי הנתונים בכל שרטוט:



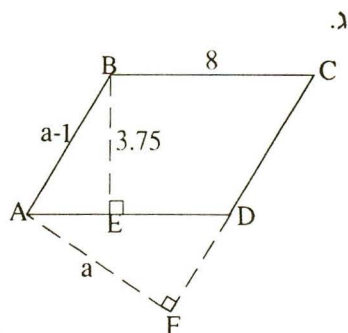
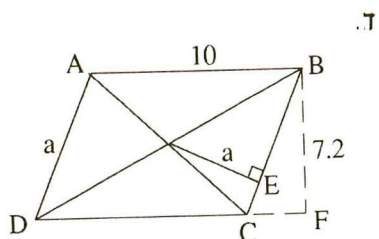
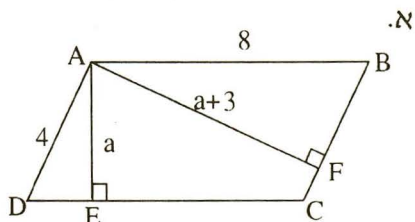
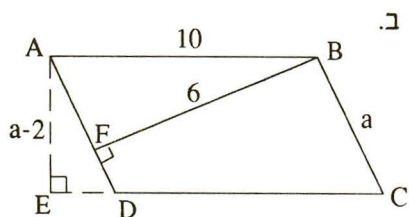


8. שרטט שני גבהים של המקבילית היוצאים מהקודקוד B, וחשב את אורכייהם, אם ידוע ששטח המקבילית 24 סמ"ר, וכן:
 $AD = 4$ ס"מ . $DC = 8$ ס"מ

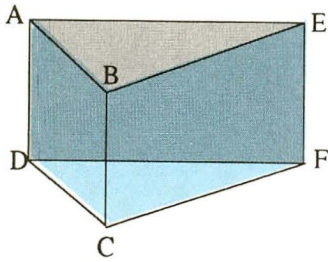


9. א. שרטט גבהים לצלע CD, מהקודקדים A ו-B.
 ב. שרטט את גבהי המקבילית היוצאים מ-C. אילו מבין הגבהים שרטטת ב-A' וב-B' שווים זה לזה?

10. חשב את a ואת שטח המקבילית, לפי הנתונים שבכל שרטוט:



11. הוכח, שגבהי המעוין שווים זה לזה.

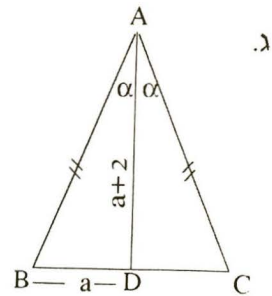
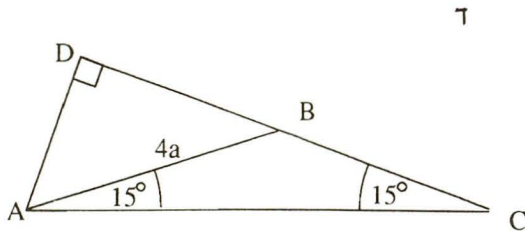
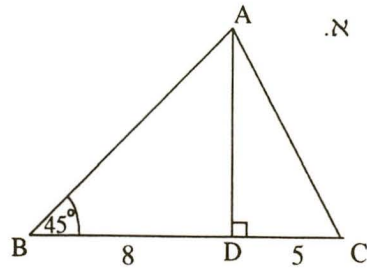
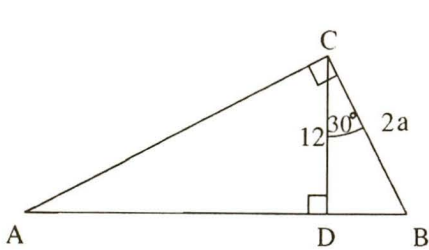


12. AEFD מלבן; $ABCD$ ו- $BEFC$ מקבילות.

הוכח ששטח המלבן שווה לסכום שטחי שתי המקבילות

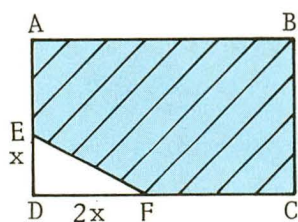
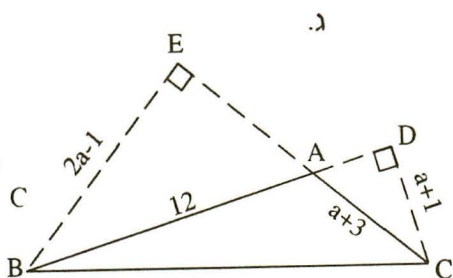
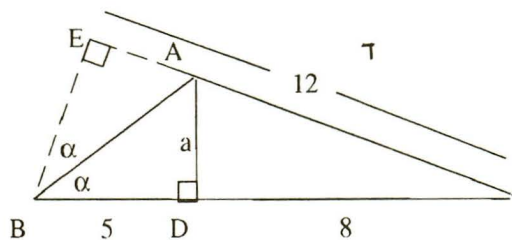
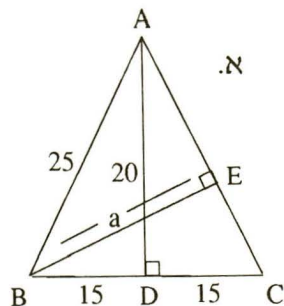
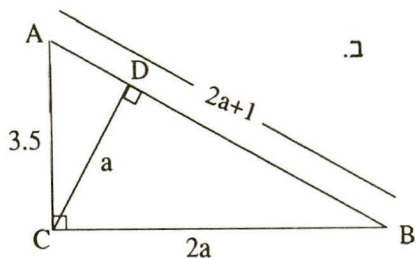
סעיף 3

13. חשב את שטח המשולש ABC , לפי הנתונים שבכל שרטוט.



14. במשולש ABC נתון: $a = 12$ ס"מ; $b = 17$ ס"מ; $h_b = 9$ ס"מ. חשב את h_a ואת שטח המשולש.

15. חשב את הערך של a ואת שטח המשולש ABC בכל אחד מהסעיפים הבאים:



16. במלבן ABCD, שצלעותיו:

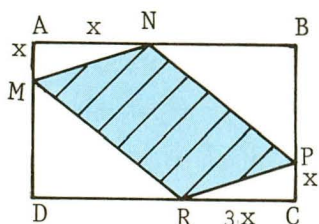
$AB = 4$ ס"מ, $BC = 3$ ס"מ,

הקצו קטעים $ED = x$, $DF = 2x$

כמתואר בשרטוט.

בטא את שטח המחומש ABCFE

באמצעות x.



17. אורכי צלעות מלבן 9 ס"מ ו-12 ס"מ.

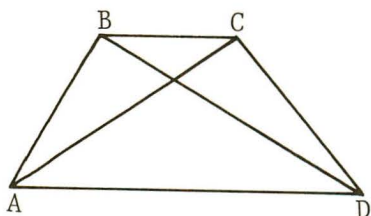
על צלעות המלבן הקצו קטעים x

ו- $3x$, כמתואר בשרטוט.

א. הוכח כי MNPR מקבילית.

ב. בטא את השטח המקווקו - S

באמצעות x.

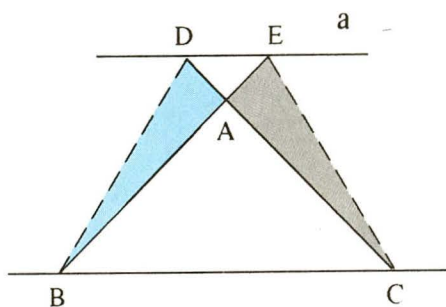


18. נתון טרפז ABCD.

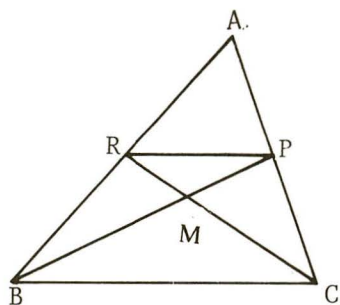
הוכח:

$$S_{ABD} = S_{ACD}$$

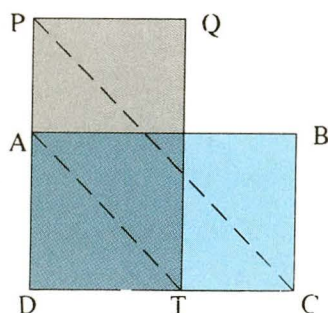
$$S_{ABC} = S_{DBC}$$



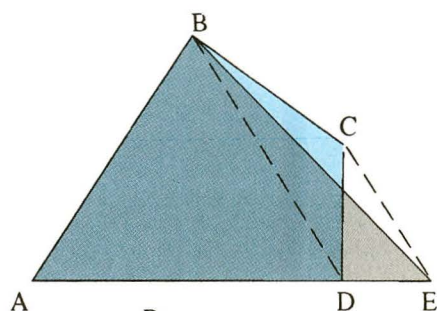
19. הישר a מקביל לבסיס המשולש ABC וחותך את המשכי הצלעות AC ו- BA בנקודות D ו- E בהתאמה. הוכח כי, המשולשים ADB ו- AEC שווים-שטח.



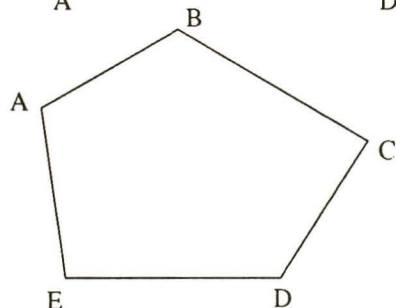
20. במשולש ABC נתון: $RP \parallel BC$. הקטעים CR ו- BP נחתכים בנקודה M . מצא לכל אחד מהמשולשים הבאים משולש שווה לו בשטחו (נמק!):
א. RPB ג. PMC
ב. PBC ד. ABP



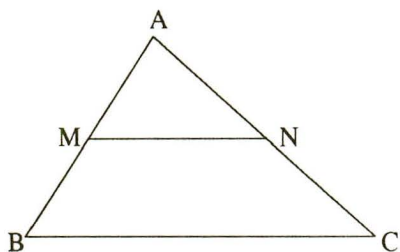
- 21*. נתון מלבן $ABCD$. T נקודה על DC . נתון $AT \parallel CP$ (P על המשך DA); $PRTD$ מלבן. הוכח כי שטחי המלבנים $PRTD$ ו- $ABCD$ שווים זה לזה.



- 22*. נתון מרובע $ABCD$ CE מקביל לאלכסון BD (E על המשך AD) הוכח: שטח המשולש ABE שווה לשטח המרובע $ABCD$



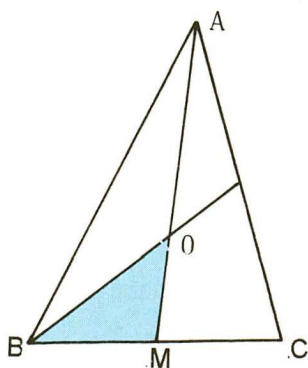
- 23*. האם תוכל להעזר בתרגיל הקודם כדי למצא מרובע שקול למחומש $ABCDE$. הסבר!



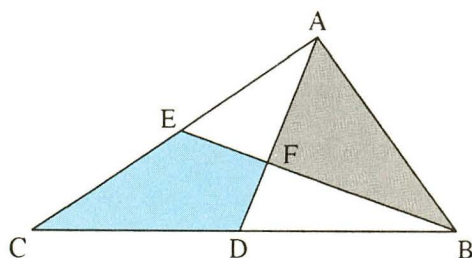
24. MN הוא קטע אמצעים במשולש ABC.
 הוכח כי, שטח המרובע MNCB גדול פי 3 משטח המשולש AMN.
 רמז: מצא קשר בין שטחי המשולשים AMN ו-ABC.

25. הוכח התיכון מחלק את המשולש לשני משולשים שוויוניים שטח (ראה 3.2 ה').

26. AM ו-CN הם תיכונים במשולש ABC. הוכח כי, המשולשים BAM ו-BNC שווים בשטחיהם.

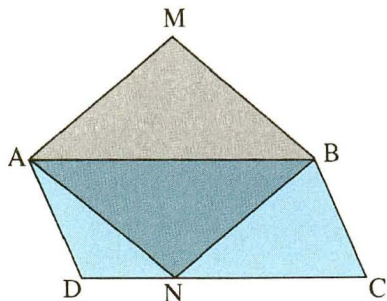


27. O נקודת מפגש התיכונים, במשולש ABC.
 הוכח כי, שטח המשולש BOM שווה ל- $\frac{1}{6}$ משטח המשולש ABC.

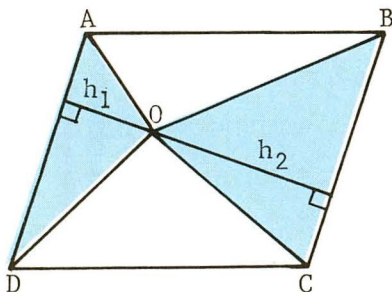


28. AD ו-BE תיכונים במשולש ABC. נקודת המפגש שלהם - F.
 הוכח כי, שטח המרובע FECD שווה לשטח המשולש ABF.

29. הוכח: אלכסוני המקבילית מחלקים אותה לארבעה משולשים שווים בשטחיהם (ראה 3.2 ו').

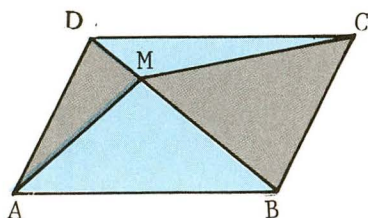


30. ABCD מקבילית. N נקודה על DC.
 AMBN מקבילית.
 הוכח כי שטח שתי המקביליות שווים זה לזה.

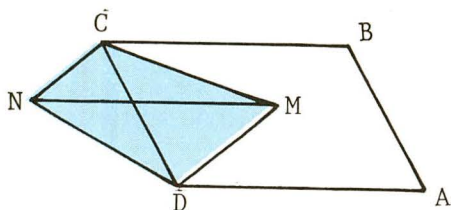


31. הוכח: אם נקודה O נמצאת בתוך מקבילית ABCD, אז h_1 ו- h_2 (גבהי המשולשים AOD ו-BOC) מונחים על ישר אחד; וכן: סכום שטחי המשולשים AOD ו-BOC שווה למחצית שטח המקבילית.

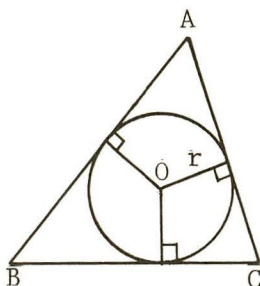
32. O נקודה בתוך מקבילית ABCD. הוכח כי סכום שטחי המשולשים, שיוצרת הנקודה O עם זוג אחד של צלעות נגדיות במקבילית, שווה לסכום שטחי המשולשים, שהיא יוצרת, עם זוג הצלעות הנגדיות האחרות.



33. M נקודה על האלכסון BD של מקבילית ABCD. הוכח כי, שטחי המשולשים AMD ו-AMB שווים בהתאמה לשטחי המשולשים CMD ו-CMB.



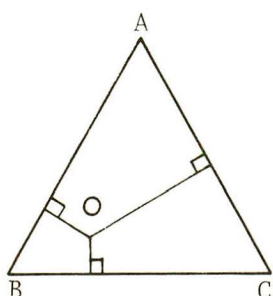
34. דרך הנקודה M, שבתוך המקבילית ABCD, בנו ישר מקביל לצלע AD, והיקצו עליו קטע MN השווה ל-BC. הוכח כי, שטח המרובע MDNC שווה למחצית שטח המקבילית.



- 35*. O - מרכז המעגל החסום במשולש ABC.

הוכח כי, שטח המשולש ABC, שווה למכפלת רדיוס המעגל החסום במשולש, במחצית היקף המשולש. כלומר, $S = \frac{1}{2}(a+b+c)r$ או $S = pr$ (p מחצית היקף המשולש)





36* O נקודה בתוך משולש

שווה-צלעות ABC.

הוכח כי סכום האנכים לצלעות,

היוצאים מ-O, הוא גודל קבוע

ושווה לגובה המשולש.

37. אלכסוני המעוין מתיחסים כמו 5:3. שטח המעוין 30 סמ"ר.

חשב את אורך האלכסונים.

38. משולש שווה-שוקיים, שבסיסו 10 ס"מ $BC =$. הנקודה D מונחת על

המשך הגובה AE. נתון: $AE = 6.4$ ס"מ, $ED = 12.2$ ס"מ.

חשב את שטח המרובע ABDC. הבחן בין שני מקרים.

39. במעוין ABCD, גדול אלכסון אחד ב-1 ס"מ מהאלכסון האחר.

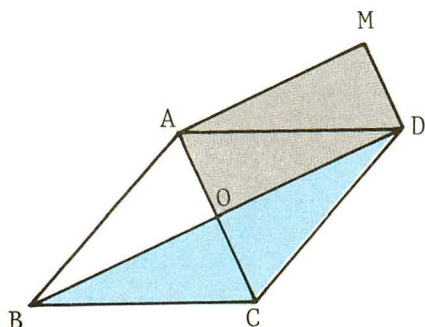
שטח המעוין שווה 10 סמ"ר. חשב את גודל האלכסונים.

40. במעוין בעל צלע a ואלכסונים k ו-l, חסום מעגל בעל רדיוס r.

הוכח כי: $k \cdot l = 4ar$.

41. במעוין בעל צלע 12.5 ס"מ $a =$, חסום מעגל בעל רדיוס

4 ס"מ $r =$. חשב את שטח המעוין.



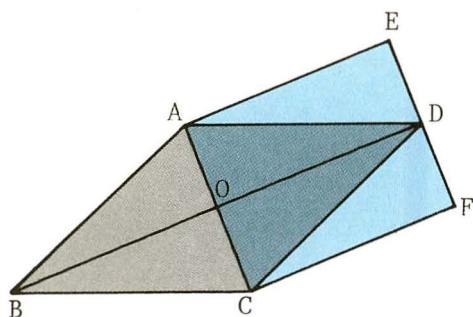
42. ABCD מעוין. דרך הקודקודים

A ו-D בנו מקבילים AM ו-DM

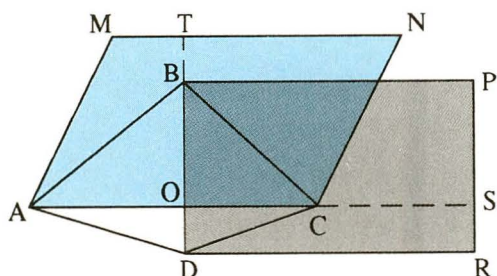
לאלכסוני המעוין. הוכח כי

שטח המשולש BDC שווה לשטח

המרובע AMDO.

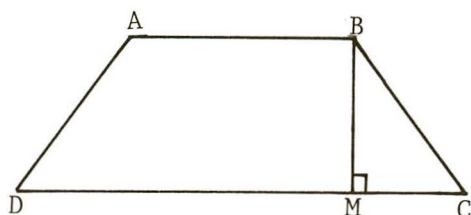


43. ABCD מעוין. דרך קודקדיו A, D ו- C בנו מקבילים לאלכסוני, ונוצר מרובע AEFC. הוכח כי, שטח מרובע זה שווה לשטח המעוין.

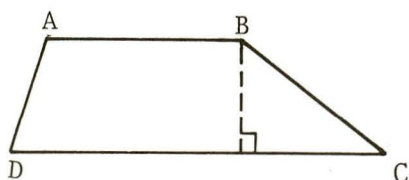


44. ABCD מרובע, שאלכסוני מאונכים זה לזה. AMNC מקבילית, BPRD מלבן. נתון: $AO = CS$, $BT = OD$. הוכח כי שטחי המקבילית והמלבן שווים זה לזה.

סעיף 4

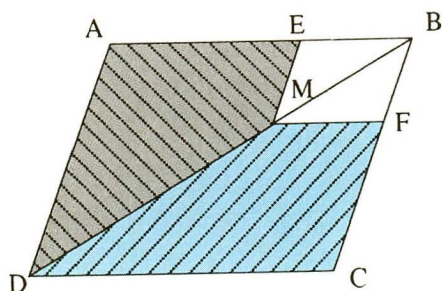


45. בטרפז שווה-שוקיים ABCD, נתון: 42 ס"מ $AB =$, $BM \perp DC$, 52 ס"מ $DM =$, $\angle DAB = 135^\circ$. מצא את שטח הטרפז.

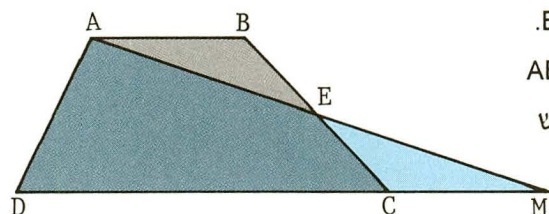


46. בטרפז ABCD נתון: 5 ס"מ $AB =$, 17 ס"מ $DC =$, 8 ס"מ $BC =$, $\angle C = 30^\circ$. חשב את שטח הטרפז.

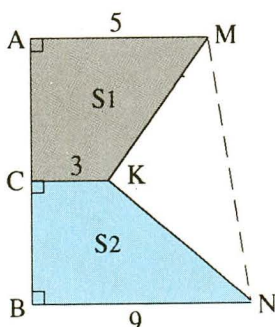
47. בטרפז ישר-זווית, שווה הזווית הקהה ל- 135° . בסיסי הטרפז הם 13 ס"מ ו- 21 ס"מ. חשב את שטח הטרפז.



48. BD אלכסון במקבילית ABCD. דרך הנקודה M על האלכסון, בונים מקבילים EM ו-MF לצלעות המקבילית, הוכח כי, שטח הטרפז AEMD שווה לשטח הטרפז MFCD.



49. נתון טרפז ABCD, וכן $BE=EC$. נקודת המפגש של המשכי AE ו-DC. הוכח כי שטח המשולש ADM שווה לשטח הטרפז.



50. C נקודה על קטע AB, שאורכו 12 ס"מ. התיחס לנתונים שבשרטוט וחשב: מה צריך להיות אורך הקטע AC, כדי שהשטחים S_1 ו- S_2 יהיו שווים זה לזה. חשב את שטח המשולש MKN.



תשובות

- (1) א. 40, ב. 28, ג. $4a$, ד. $(a+1)^2/2$
 (2) א. 49, ב. 50, ג. 32, ד. $(a+4)^2$
 (3) $21x - 4x^2$
 (4) 2, 4, השטחים שווים. (5) 7. (6) 4, 5. (7) א. 30, ב. $4a$, ג. 42, ד. 40.
 (8) 3, 6. (10) א. 3, 24. ב. 5, 30. ג. 6, 30. ד. 6, 72.
 (13) א. 52. ב. $24a$. ג. $a(a+2)$. ד. $4a^2$. (14) 12.75, 76.5.
 (15) א. 24, 300. ב. 3, 10.5. ג. 5, 36. ד. 3.3, 21.6. (16) $12 - X^2$
 (17) $39X - 6X^2$. (37) 6, 10. (38) 29, 93. (39) 4, 5.
 (41) 100. (45) 520. (46) 44. (47) 136. (50) א. 7.2, ב. 26.4.

פרק ד: משפט פיתגורס

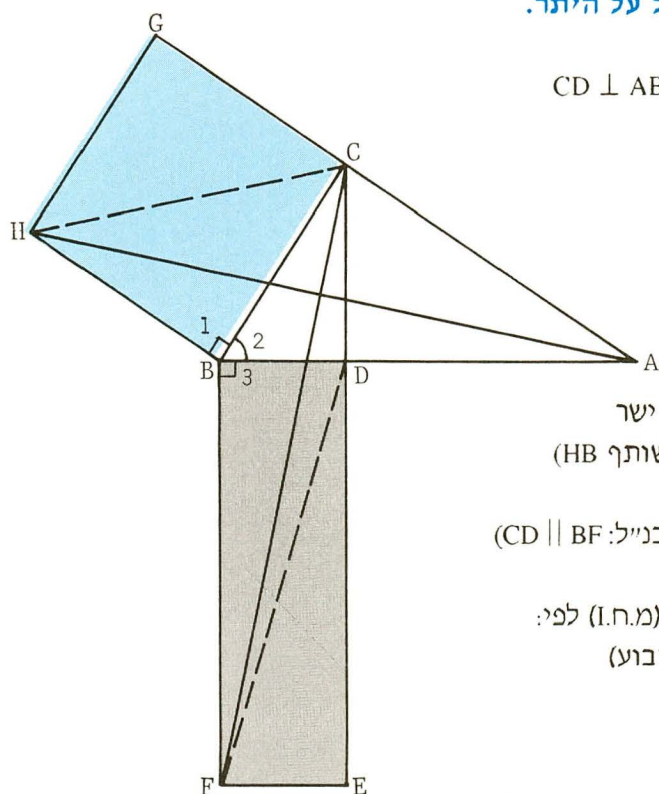
משפט פיתגורס הוא אחד המשפטים החשובים ביותר בהנדסת המישור. שימושי רבים, לא רק במסגרת הנדסת המישור, אלא בכל ענפי המתמטיקה. משפט פיתגורס מתקבל כמסקנה ממשפט אויקלידס, ולכן נוכיח תחילה את משפט אויקלידס.

1. משפט אויקלידס

משפט.



שטח הריבוע הבנוי על ניצב של משולש ישר-זווית שווה לשטח המלבן, שצלעו האחת היא היתר של המשולש וצלעו השניה היא היטל הניצב הנ"ל על היתר.



$$CD \perp AB, BC \perp AC, \triangle ABC$$

BHGC ריבוע

BDEF מלבן

$$BF = AB$$

$$S_{BHGC} = S_{BDEF}$$

$$S_{HCB} = S_{HAB} \quad 1.$$

(C ו-A, מונחים על ישר

מקביל לבסיס המשותף HB)

$$S_{BCF} = S_{BDF} \quad 2. \quad (CD \parallel BF: \text{כנ"ל})$$

$$\triangle HBA \cong \triangle CBF \quad 3. \quad (\text{מ.ח.י.}) \text{ לפי:}$$

HB = BC (צלעות ריבוע)

AB = BF (נתון)

נתון

צ"ל

הוכחה

$$\begin{aligned}(\angle B_2 + 90^\circ) \angle HBA &= \angle CBF \\ S_{HCB} = S_{HBA} = S_{CBF} = S_{BDF} &\Leftarrow \\ S_{HCB} = S_{BDF} &\Leftarrow \\ S_{BHGC} = S_{BDEF} &\Leftarrow \\ \text{מ.ש.ל.}\end{aligned}$$

1.2 המשפט הזה מוכר יותר בצורה הבאה:

$$b^2 = c \cdot b_c \text{ או } a^2 = c \cdot a_c$$

כאשר b_c ו- a_c הם הטלי הצלעות a ו- b על הצלע c .

2. משפט פיתגורס

2.1 (משפט פיתגורס).

שטח הריבוע הבנוי על היתר, במשולש ישר זווית, שווה לסכום שטחי הריבועים הבנויים על כל אחד מניצביו:



$$c^2 = a^2 + b^2$$

את משפט פיתגורס אפשר להוכיח בדרך אלגברית:
לפי משפט אויסקלידס, במשולש ABC ($\angle C = 90^\circ$) מתקיים:

$$b^2 = c \cdot b_c \text{ וגם } a^2 = c \cdot a_c$$

מחיבור שני השווייונים הללו מקבלים:

$$a^2 + b^2 = c \cdot a_c + c \cdot b_c = c(a_c + b_c) = c \cdot c = c^2$$

מ.ש.ל.

2.2 גם המשפט ההפוך קיים:

משפט



אם ריבוע של צלע במשולש, שווה לסכום ריבועי שתי הצלעות האחרות, אז הזווית המונחת מול אותה צלע היא ישרה, כלומר המשולש הוא ישר-זווית.

3. דוגמאות

דוגמה א'

במשולש ישר-זווית נתון: $a = 6$ ס"מ, $b = 8$ ס"מ, חשב את מחוג המעגל החוסם את המשולש ואת הגובה ליתר.

פיעין

אם משולש ישר-זווית ABC חסום במעגל O, היתר שלו AB הוא קוטר המעגל. כלומר $c = 2R$, כאשר R - רדיוס המעגל החוסם.

$$c^2 = a^2 + b^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

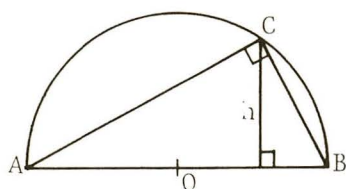
$$\text{לכן } c = 10 \text{ ס"מ} \Leftarrow R = 5 \text{ ס"מ}$$

לחישוב הגובה נעזר בנוסחת השטח:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} c \cdot h$$

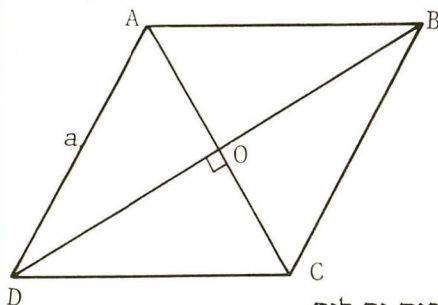
$$\text{כלומר } a \cdot b = c \cdot h$$

$$h = a \cdot b / c = 6 \cdot 8 / 10 = 4.8 \text{ ס"מ}$$



דוגמה ב'

אורך צלע המעוין 5 ס"מ, האלכסון הגדול 8 ס"מ. חשב את שטח המעוין.



נתון	מעוין ABCD
	$a = 5$ ס"מ
	$BD = 8$ ס"מ
צ"ל	S_{ABCD}

פתרון במעוין האלכסונים נחצים ומאונכים זה לזה.

$$OC^2 = BC^2 - BO^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

$$\text{או } OC = 3 \text{ ס"מ}$$

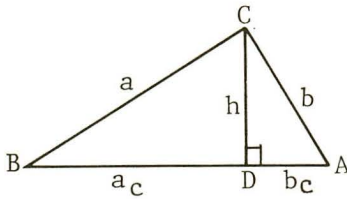
שטח מעוין שווה למחצית מכפלת אלכסוניו.

$$S_{ABCD} = \frac{BD \cdot AC}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ סמ"ר}$$

מ.ש.ל.

דוגמה ג'

במשולש ABC ($\angle C = 90^\circ$), אורך הגובה ליתר 2.4 ס"מ h . היטל הניצב b על היתר 1.8 ס"מ b_c . חשב את הניצב a ואת היטלו על היתר a_c .



פתרון

במשולש ACD

$$b^2 = h^2 + b_c^2 = 2.4^2 + 1.8^2$$

$$b^2 = 5.76 + 3.24 = 9$$

$$\Rightarrow b = 3 \text{ ס"מ}$$

לפי משפט אויכלידס (במשולש ABC):

$$b^2 = c \cdot b_c \Rightarrow 9 = c \cdot 1.8 \Rightarrow c = 5 \text{ ס"מ}$$

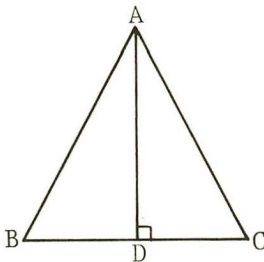
ולפי משפט פיתגורס

$$a^2 = c^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4 \text{ ס"מ}$$

$$\text{ואז } a_c = c - b_c = 5 - 1.8 = 3.2 \text{ ס"מ}$$

דוגמה ד'

הוכח: שטחו של משולש שווה צלעות, שאורך צלעו a , נתון בנוסחה:



$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

הוכחה

במשולש ABC : $AB = BC = AC = a$;

הגובה AD חוצה את הצלע BC ,

לכן, במשולש ADC :

$$AD^2 = AC^2 - CD^2 = a^2 - a^2/4 = 3a^2/4$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ כלומר:}$$

$$S = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ ואז השטח:}$$

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \text{ או}$$

4. הרחבת משפט פיתגורס

משפט פיתגורס נותן קשר בין צלעות משולש ישר-זווית. ניתן למצוא קשר בין צלעות משולש, שאיננו ישר-זווית. במקרה זה, מופיע בנוסחה המקשרת מרכיב נוסף: הטל של צלע אחת על צלע אחרת.

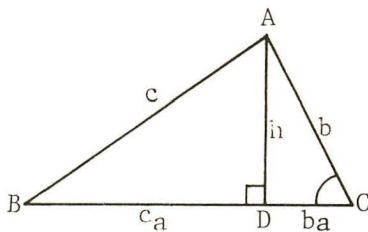
4.1 משפט



שטח הריבוע הבנוי על הצלע, שמונחת מול זווית חדה של משולש, שווה לסכום שטחי הריבועים, הבנויים על שתי הצלעות האחרות, פחות כפליים שטח המלבן שממדיו הם: אחת מהצלעות הנ"ל והיטל הצלע השניה עליה.

או בניסוח אלגברי:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b_a$$



ה/כח

במשולש ADC:

$$h^2 = b^2 - b_a^2$$

כמו כן: $c_a = a - b_a$

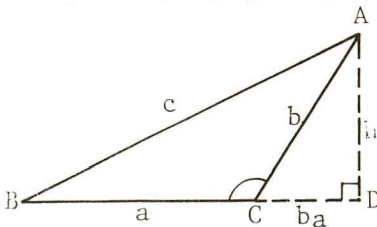
לכן במשולש ABD:

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + c_a^2 = b^2 - b_a^2 + (a - b_a)^2 = \\ &= b^2 - b_a^2 + a^2 - 2a \cdot b_a + b_a^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b_a \\ &\text{מ.ש.ל.} \end{aligned}$$

4.2 במשולש קהה-זווית ($\angle C > 90^\circ$) שצלעותיו a, b, c קיים הקשר:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot b_a$$

הוכח!



4.3 שימושים

המשפטים הנ"ל, מאפשרים לסווג משולשים לפי זוויותיהם. (חד-זווית, ישר-זווית, קהה-זווית), כאשר ידועות צלעותיו:

- אם ריבוע הצלע הגדולה ביותר במשולש, שווה לסכום ריבועי הצלעות האחרות, המשולש ישר-זווית.
- אם ריבוע הצלע הגדולה ביותר, גדול מסכום ריבועי הצלעות האחרות,

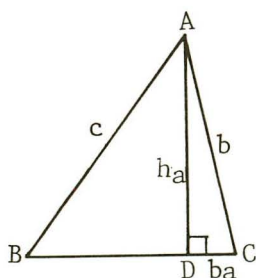
יהיה המשולש קהה-זווית.
 ג. אם ריבוע הצלע הגדולה ביותר, קטן מסכום ריבועי הצלעות האחרות,
 יהיה המשולש חד-זווית

למשל: במשולש ABC, שצלעותיו: $a = 5$ ס"מ, $b = 7$ ס"מ, $c = 9$ ס"מ תהיה הזווית C קהה, כי: $81 > 49 + 25$

לעומת זאת, המשולש שצלעותיו 8, 10, 12 ס"מ הוא חד זווית כי:
 $12^2 < 10^2 + 8^2$

5. נוסחת הירון

למשפט פיתגורס המורחב שימוש גם בהוכחת נוסחה לחישוב שטח משולש בעזרת צלעותיו - נוסחת הירון (Heron).



$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

כאשר p הוא מחצית היקף המשולש.

ה/כזה

נבטא את גובה המשולש בעזרת צלעותיו.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot ba \quad \text{לפי סעיף 4.1:}$$

$$ba = (a^2 + b^2 - c^2) / 2a \quad \text{מכאן:}$$

$$ha^2 = b^2 - ba^2 \quad \text{במשולש ADC}$$

$$b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)}{4a^2} = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)}{4a^2}$$

שימוש בנוסחות הכפל, מאפשר לפתח את המונה בצורה הבאה:

$$\begin{aligned} (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2) &= (2ab + a^2 + b^2 - c^2) (2ab - a^2 - b^2 + c^2) = \\ &= [(a^2 + b^2 + 2ab) - c^2] [c^2 - (a^2 - 2ab + b^2)] \\ &= [(a+b)^2 - c^2] [c^2 - (a-b)^2] \\ &= (a+b+c) (a+b-c) (c+a-b) (c-a+b) \end{aligned}$$

נסמן: $p = (a + b + c) / 2$ ונציב בביטוי של הגובה:

$$ha^2 = 2p \cdot 2(p-c) \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-a) / 4a^2 = 4p(p-a)(p-b)(p-c) / a^2$$

$$ha = 2 \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} / a \quad \text{או}$$

ושטח המשולש יהיה: $S = 1/2 a \cdot h_a = 1/2 a \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}/a$

או

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

מ.ש.ל.

6. חישובים במעגל

משפט

היקף מעגל (L), בעל רדיוס נתון R שווה לפעמיים π כפול רדיוס

$$L = 2\pi R$$

π - פיי הוא מספר קבוע השווה ל-22/7 או ל-3.14 בקרוב.



משפט

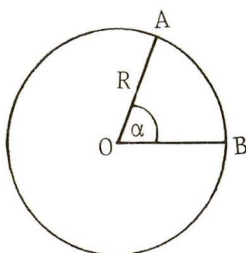
היחס בין אורך הקשת לבין היקף כל המעגל שווה ליחס בין הזווית המרכזית הנשענת על הקשת, ל-360.

אם מסמנים את אורך הקשת AB ב-k, אז:

$$\frac{k}{2\pi R} = \frac{\alpha}{360}$$

$$k = \frac{\pi R \alpha}{180}$$

לכן:



משפט

שטח עיגול שווה לריבוע הרדיוס כפול המספר הקבוע π :

$$S = \pi R^2$$

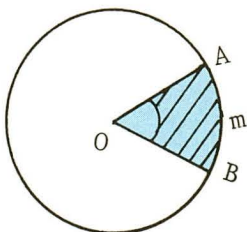


גזרה - חלק העיגול, הכלוא בין קשת של מעגל - AmB ושני רדיוסים AO ו-BO.

משפט

שטח גזרה מתיחס לשטח העיגול, כמו היחס בין הזווית המרכזית של הגזרה ל-360.

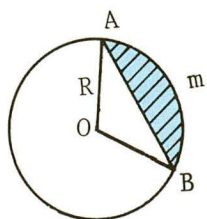




$$\frac{S_{AmBO}}{\pi R^2} = \frac{\alpha}{360}$$

$$S_{AmBO} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} \quad \text{או}$$

מקטע - חלק העיגול, הכלוא בין קשת של מעגל והמיתר שלה.

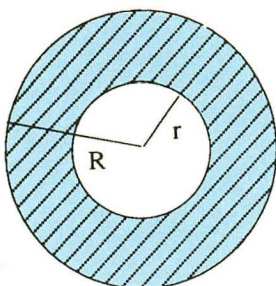


את שטח המקטע AmB ניתן לבטא כהפרש בין שטח הגיזרה בעלת אותה הקשת AmBO ושטח המשולש AOB.

$$S_{AmB} = S_{AmBO} - S_{ABO}$$

טבעת - חלק המישור הנמצא בין שני מעגלים מרכזיים

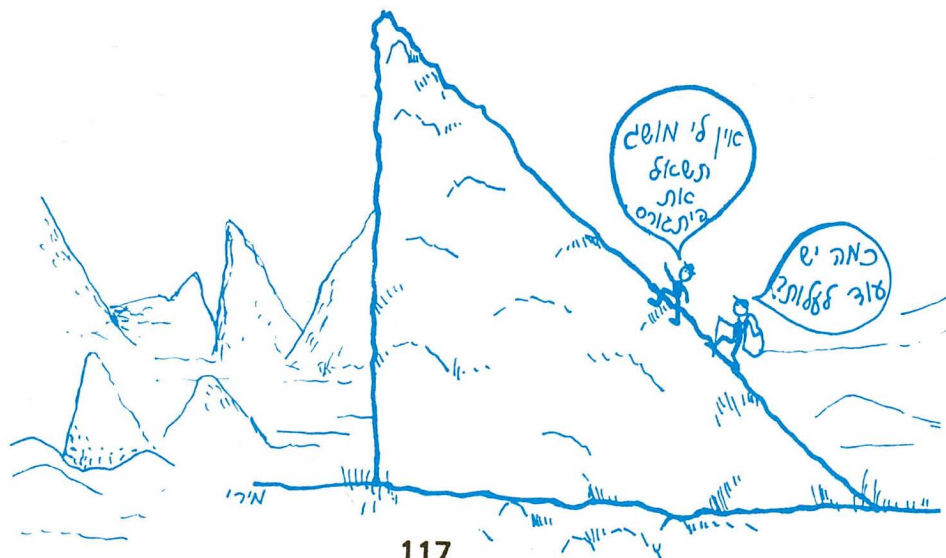
רוחב הטבעת - AB שווה להפרש בין אורכי המחווגים: $AB = R - r$



שטח הטבעת הנוצרת

ע"י שני מעגלים, בהתאמה שמחווגיהם R ו- r שווה ל-

$$\pi(R^2 - r^2)$$

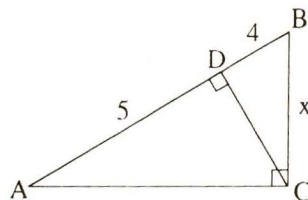


תרגילים

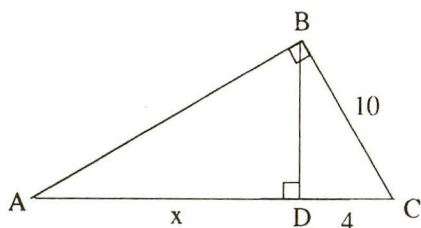
סעיפים 1-3

1. חשב את x

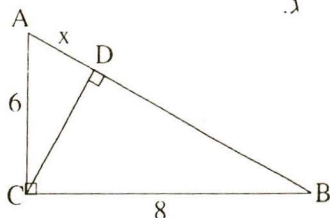
א.



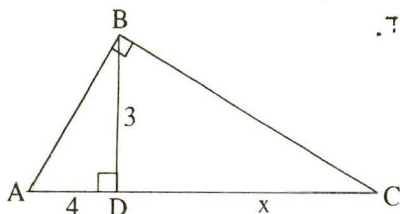
ב.



ג.



ד.



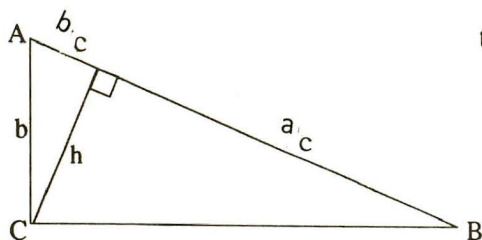
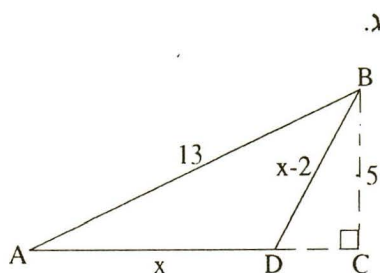
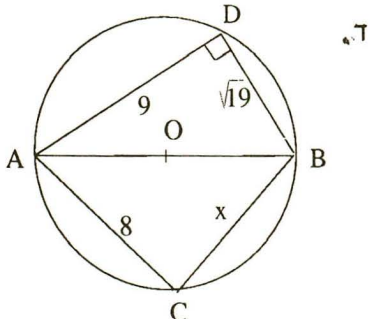
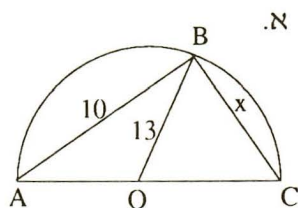
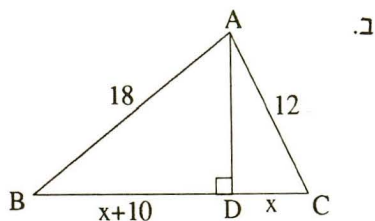
2. אורכי האלכסונים במעוין 12 ס"מ ו-16 ס"מ. חשב את היקף המעוין.

3. במשולש שווה-שוקיים, שווה השוק ל-39 ס"מ והגובה לבסיס 36 ס"מ. מצא את בסיס המשולש ואת שטחו.

4. במעגל O, בעל רדיוס 13 ס"מ, R = רשום מיתר AB, שאורכו 24 ס"מ. חשב רוחקו OD של מיתר זה מהמרכז.

5. במעגל O, נתונים שני מיתרים מקבילים שאורכיהם 20 ס"מ ו-48 ס"מ. חשב את רוחק בין שני המיתרים, אם רדיוס המעגל 26 ס"מ. הבחן בין שני מקרים.

6. חשב את x ואת שטח המשולש ABC (O מרכז המעגל החוסם את המשולש).



7. חשב את רדיוס המעגל R החוסם

את המשולש ABC ($\angle C = 90^\circ$)

ואת רדיוס המעגל החסום בו r .

א. $a_c = 3.6$ $c = 10$

ב. $h = 9.6$ $b = 12$

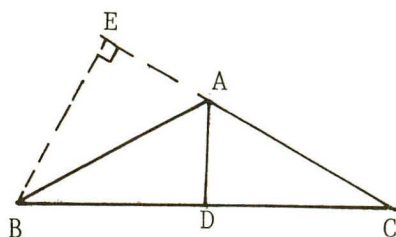
8. במשולש ABC : $AC \perp BC$, השטח S . חשב את הגובה ליתר h , ואת רדיוס

המעגל החסום במשולש r , כאשר נתון:

א. $a = 5$ ס"מ, $S = 30$ סמ"ר

ב. $b = 24$ ס"מ, $R = 20$ ס"מ

ג. $S = 54$ סמ"ר, $R = 7.5$ ס"מ



9. במשולש שווש ABC , שווה הבסיס BC

ל- 16 ס"מ; הגובה $AD = 6$ ס"מ

והגובה $BE = 9.6$ ס"מ.

א. חשב את אורך השוק בשתי דרכים:

ע"י שימוש במשפט פיתגורס, ובלעדיו.

ב. חשב את הקטעים AE ו- EC.

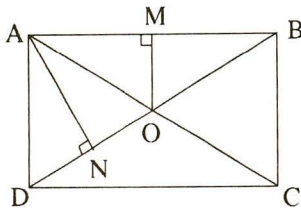
10. אלכסון הריבוע שווה ל- 16 ס"מ. חשב את צלעו של הריבוע בשתי דרכים.

11. הגובה במשולש שווה צלעות - $h = 5\sqrt{3}$. חשב את צלע המשולש ואת שטחו.

12. רדיוס המעגל החסום במשולש שווה צלעות 7 ס"מ r . חשב את רדיוס המעגל החסום את המשולש ואת שטח המשולש.

13. במשולש שווה-צלעות, חסום מעגל, שמחוגו $2\sqrt{3}$ ס"מ r . חשב את גובה המשולש ואת שטחו.

14. במשולש שווה-שוקיים ABC, שווה הבסיס BC ל- 40 ס"מ. הגובה BE, מקצה על השוק, קטע CE שאורכו 32 ס"מ. מצא את הגובה AD ואת שטח המשולש. איזה סוג משולש קיבלת?



15. חשב את שטח המלבן ABCD, כאשר:

א. $OM = 5$ ס"מ $OC = 13$ ס"מ

ב. $AO = 13$ ס"מ $ON = 5$ ס"מ

ג. $DN = 2$ ס"מ $OM = 3$ ס"מ

16. נתונה מקבילית ABCD, שבה $AE \perp DC$, $AF \perp BC$. חשב את האלכסון AC ואת שטח המקבילית, כאשר נתון (בס"מ):

א. $DE = 8$ $AD = 10$ $AB = 12$

ב. $AE = 10$ $BF = 9$ $AF = 12$

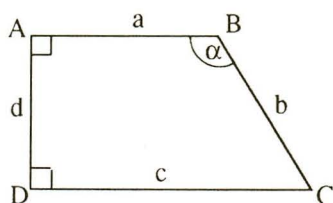
ג. $AD = 25$ $AE = 20$ $BD = 52$

17. במקבילית נתונות שתי צלעות a ו- b והזווית שביניהן α . חשב את אלכסוניה.

א. $\alpha = 60^\circ$, $b = 8$ ס"מ, $a = 12.5$ ס"מ

ב. $\alpha = 45^\circ$, $b = 10$ ס"מ, $a = 15$ ס"מ

18. ABCD טרפז ישר זווית, חשב את שטחו, כאשר נתון (אורך הקטעים בס"מ):



- א. $d = 8$, $a = 10$, $b = 10$
 ב. $BD = 52$, $b = 25$, $d = 20$
 ג. $\alpha = 135^\circ$, $a = 11$, $b = 8$
 ד. $\alpha = 150^\circ$, $c = 32$, $a = 22$

19. המעגלים M ו-N משיקים

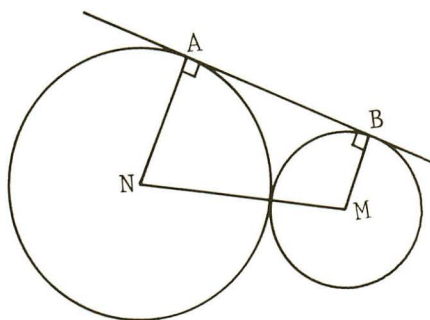
מבחוץ. אורך מחוגיהם:

4 ס"מ $AN =$

1 ס"מ $BM =$

חשב את אורך המשיק

המשותף AB.



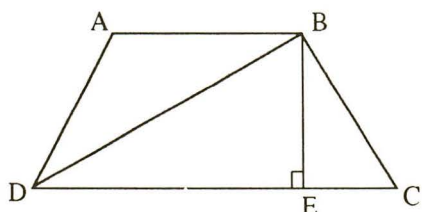
20. ABCD טרפז שווה-שוקיים.

חשב את שטחו, כאשר נתון (בס"מ):

א. $BC = 26$, $DC = 36$, $AB = 16$

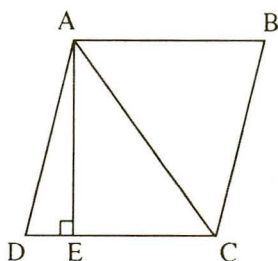
ב. $EC = 5$, $BD = 25$, $AB = 10$

ג. $\angle C = 60^\circ$, $AD = 8$, $AB = 10$



21. בטרפז נתון הבסיס הגדול - 35 ס"מ, שוקיו 15 ס"מ ו-20 ס"מ, וגובהו -

12 ס"מ. חשב את היקף הטרפז ואת שטחו.



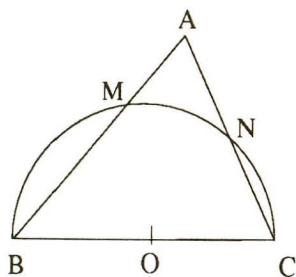
22. במעוין ABCD נתון 13 ס"מ $AD =$

$AC = \sqrt{208}$ ס"מ.

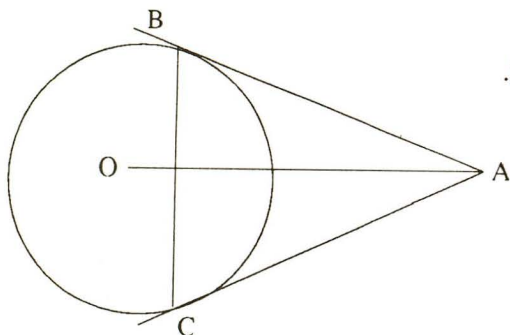
חשב: א. את הגובה AE

ב. את האלכסון BD,

בשתי דרכים.



23. על הקוטר BC של חצי עיגול - O בנו משולש ABC. על הצלע AB התקבלו הקטעים: $AM = 1$ ס"מ, $BM = 1.8$ ס"מ. רדיוס המעגל 3 ס"מ. חשב את שטח המשולש ואת אורך הצלע AC.

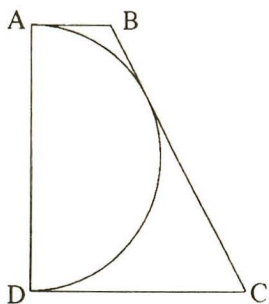


24. נתון מעגל O , שמחוגו 9 ס"מ $R =$ מהנקודה A, שרוחקה ממרכז המעגל - 15 ס"מ $OA =$ יוצאים שני משיקים AB ו-AC. חשב את אורך המיתר BC.



- 25*. התייחס לנתונים שבתרגיל הקודם. D קצה הקוטר היוצא מ-B. M נקודות החיתוך של AD עם המעגל. חשב את AD ואת AM.

26. בטרפז שוי"ש חוצה האלכסון את הזווית החדה, שגודלה 60° .
א. הוכח: המעגל הבנוי על הבסיס הגדול כקוטר, עובר דרך קודקדי הזוויות הקהות.
ב. אורך שוק הטרפז 8 ס"מ, חשב את שטחו.



27. בטרפז ישר זווית חסום חצי עיגול, כאשר השוק הקצרה משמשת לו כקוטר. בסיסי הטרפז הם a ו-b. הוכח כי שטחו שווה ל- $(a+b)\sqrt{ab}$.



- 28*. השוק של משולש שווה-שוקיים $b=13$ ס"מ, הבסיס $a=10$ ס"מ. חשב את הגובה לבסיס, ואת רדיוס המעגל החוסם את המשולש.



29*. השוק של משולש שוו"ש $b=26$ ס"מ הגובה לבסיס $AD=24$ ס"מ.

חשב את רדיוס המעגל החסום במשולש ללא שימוש בנוסחת השטח.



30*. המעגל O משיק לשוקי זווית

ישרה M בנקודות A ו- B .

CD משיק למעגל ב- K .

נתון: $CM=12$ ס"מ, $DM=9$ ס"מ.

חשב את רדיוס המעגל O ואת

אורך הקטע BD .



31*. AB קוטר במעגל O בעל

מחוג R . מקצות הקוטר כמרכזים

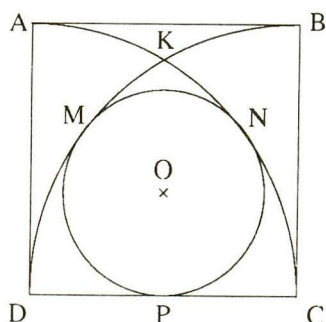
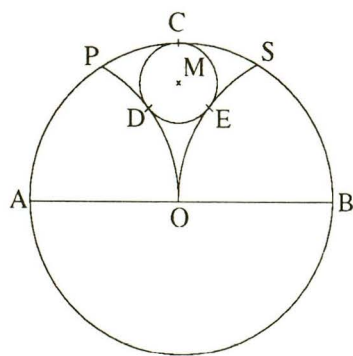
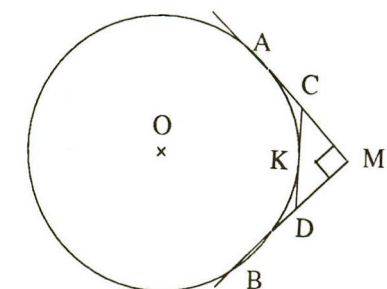
חגים שני מעגלים בעלי רדיוס R ,

החותכות את המעגל O בנקודות

P ו- S . חשב את רדיוס המעגל M ,

המשיק למעגל O בנקודה C ,

ולמעגלים A ו- B (D ו- E)



32. $ABCD$ ריבוע, שצלעו a . מהקודקים

C ו- D כמרכזים משרטטים שני רבעי

עיגול, שמחוגיהם a (נקודת החיתוך K).

חשב את רדיוס המעגל המשיק למעגלים

D ו- C (בנקודות M ו- N , בהתאמה)

ולריבוע (בנקודה P).

33. במלבן $ABCD$ חסום חצי עיגול,

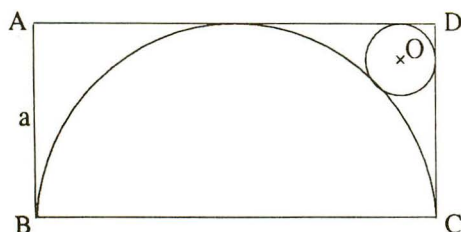
(BC קוטר). מעגל נוסף O משיק

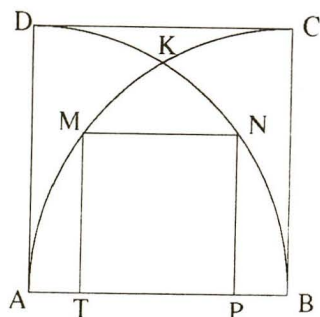
לצלעות AD ו- DC ולחצי המעגל

הנתון; $AB = a$

הוכח, כי רדיוס המעגל O

שווה ל- $a(3 - 2\sqrt{2})$

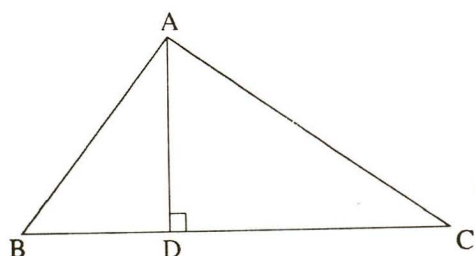




34* . צלע הריבוע ABCD שווה ל- a .

מהנקודות A ו- B כמרכזים חגים שני רבעי מעגל, שמחוגם a , (נקודת החיתוך K). חשב את צלע הריבוע MNPT, כאשר TP מונחת על AB, M ו- N על המעגלים.

35 . במשולש ABC נתון הגובה לצלע AB $CD = 3$ ס"מ, והקטעים: $BD = 2$ ס"מ ו- $AD = 4.5$ ס"מ. הראה כי הזווית C ישרה.



36 . במשולש ABC נתון:

$$AD \perp BC, AD = 2\sqrt{5} \text{ ס"מ}$$

$$BD = 4 \text{ ס"מ}, BC = 9 \text{ ס"מ}$$

א. חשב את הצלעות AB ו- AC

ב. הוכח: $AB \perp AC$

37 . צלעות המשולש ABC הן: $a = 20$ ס"מ, $b = 10\sqrt{3}$ ס"מ, $c = 10$ ס"מ. חשב את זוויות המשולש.

38 . נתון מעגל O בעל רדיוס 13 ס"מ. R. על הקוטר MN בנו משולש MNP שצלעותיו: $MP = 10$ ס"מ, $NP = 24$ ס"מ. הראה כי המשולש MNP חסום במעגל.

39 . אלכסוני המקבילית ABCD שווים ל- 16 ס"מ ו- 12 ס"מ. מה צריך להיות אורך הצלע AB כדי שהמקבילית תהיה מעוין?

סעיפים 4, 5

40 . במשולש ABC נתון: $a = 11$ ס"מ, $b = 17$ ס"מ, $c = 14$ ס"מ. חשב את הטל הצלע a על הצלע b - a_b וכן את b_a .

41. הוכח שהמשולש בבעיה הקודמת, הוא חד-זווית וחשב את שטחו.

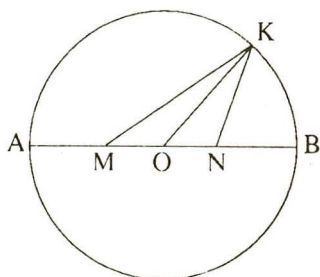
42. במשולש ABC נתון: $a = 20$ מ', $b = 14$ מ', $c = 11$ מ'.
סווג את המשולש מבחינת זוויותיו וחשב את b_c ואת a_b .

43. במשולש ABC נתון: $a = 12$ מ', $b = 16$ מ', $c = 20$ מ'.
א. חשב: a_b, c_a, b_c . הסבר את משמעות התוצאות.
שקיבלת וסווג את המשולש מבחינת זוויותיו.
ב. חשב את שטחו, בשתי דרכים.

44. הוכח כי תיכון (m_c) במשולש ABC, נתון בנוסחה:
$$m_c^2 = (2a^2 + 2b^2 - c^2) / 4$$

45. הוכח: סכום ריבועי תיכוני המשולש שווה ל- $3/4$ מסכום ריבועי צלעותיו.

46*. a, b, c צלעות המשולש ABC. הוכח כי, אם התיכונים m_c ו- m_b מאונכים, אז צלעות המשולש מקיימות את הקשר $b^2 + c^2 = 5a^2$.



47**. AB קוטר במעגל, שמחוגו R.
M ו- N נקודות על הקוטר,
כך ש- $MO = NO$. K נקודה
על המעגל O. הוכח, כי הסכום
 $KN^2 + KM^2$ הוא גודל קבוע.

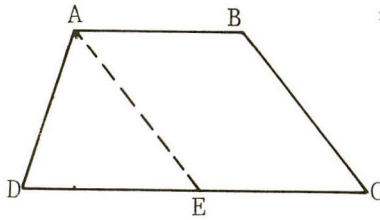
48. חשב שטח מקבילית שצלעותיה 11 ס"מ ו- 14 ס"מ ואלכסונה הגדול - 20 ס"מ.

49. חשב שטחו של משולש שווה-צלעות, שצלעו 12 ס"מ, a , בשתי דרכים.

50. העזר בנוסחת הירון, כדי להוכיח כי שטח משולש שווה-צלעות
בעל צלע a , שווה ל- $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

51. חשב את הגובה h_a במשולש שצלעותיו :

$$a = 16 \text{ ס"מ} \quad b = 15 \text{ ס"מ} \quad c = 13 \text{ ס"מ}.$$



52. חשב שטח טרפז, שצלעותיו נתונות :

$$AB = 6 \text{ ס"מ}, BC = 9 \text{ ס"מ}.$$

$$AD = 7 \text{ ס"מ}; CD = 14 \text{ ס"מ}$$

רמז : $AE \parallel BC$

סעיף 6

53. חשב את היקף המעגל, שאורך מחוגו :

א. 12 ס"מ ב. 0.8 ס"מ ג. 14 ס"מ.

54. מהו רדיוס המעגל, שהיקפו שווה ל- 22 ס"מ?

55. מהו רדיוס המעגל, שהיקפו $\pi/2$ ס"מ.

56. חשב את שטח העיגול, שאורך מחוגו :

א. 3 ס"מ ב. 0.5 ס"מ ג. 15 ס"מ.

57. חשב את רדיוס העיגול, ששטחו 169π סמ"ר.

58. חשב את אורך הקשת של מעגל, שמחוגו 5 ס"מ, אם הזווית המרכזית הנשענת

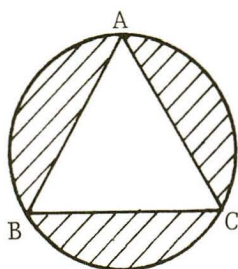
על הקשת היא בת : א. 72° ב. 15° .

59. התייחס לנתונים, שבתרגיל הקודם, וחשב את שטח הגזרה בעלת הזווית

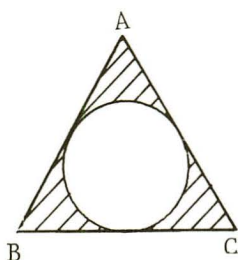
המרכזית הנתונה.

60. במעגל בעל קוטר, השווה ל- 48 ס"מ, נתון מיתר $AB = 24$ ס"מ.

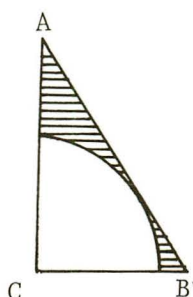
חשב את שטחי המקטעים שיוצר מיתר זה בעיגול.



61. בעיגול בעל רדיוס השווה ל-8 ס"מ חסום משולש שוו"צ ABC. חשב את השטח המקווקו.



62. במשולש שוו"צ ABC חסום מעגל בעל רדיוס 10 ס"מ. חשב את השטח המקווקו.

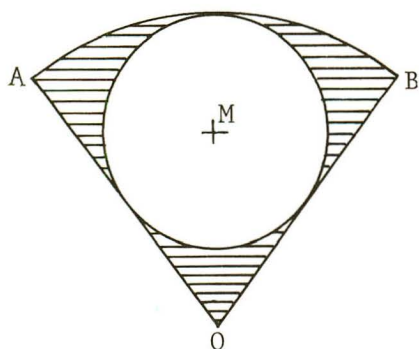


63. במשולש ABC, ישר-זווית ב- C חסום רבע עיגול, שמרכזו ב- C. נתון: $AC = 12$ ס"מ, $AB = 13$ ס"מ. חשב את השטח המקווקו.

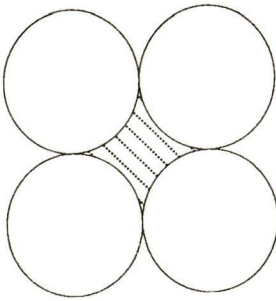
64. נתונים שני מעגלים, שמחוגיהם 3 ס"מ ו-4 ס"מ, בהתאמה. חשב את מחוג המעגל, אשר:

- היקפו שווה לסכום היקפי המעגלים הנתונים.
- שטחו שווה לסכום שטחי העיגולים הנתונים.

65. פתור את התרגיל הקודם, כאשר מחוגי המעגלים הנתונים הם R_1 ו- R_2 .



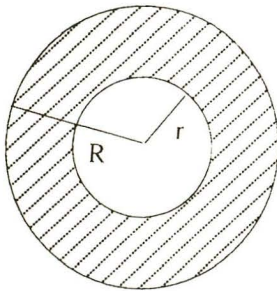
66. בגיזרה ABO חסום מעגל M. הזווית AOB היא 60° . חשב את היחס בין השטח המקווקו לשטח הלא מקווקו, אשר בתוך הגיזרה.



67. ארבעה מעגלים שווים, שמחוגיהם שווים ל- r משיקים מבחוץ (ראה שרטוט).
חשב את השטח המקווקו.



- 68*. נתונים שלושה מעגלים שווים, בעלי מחוג R , אשר כל שניים משיקים מבחוץ. חשב את השטח הכלוא בין שלושת המעגלים.



69. חשב את שטח הטבעת (השטח המקווקו), כאשר נתון:

$$R = 5 \text{ ס"מ}, r = 3 \text{ ס"מ}$$



- 70*. שטח טבעת 32π סמ"ר.

- מחוגי המעגלים היוצרים את הטבעת מתיחסים כמו 1:3.
חשב את רוחב הטבעת.



תשובות

- (1) א. 6, ב. 21, ג. 3.6, ד. 2.25 (2) 40 (3) 540, 30 (4) 5
 (5) 14 או 34 (6) א. 24, 120, ב. 4, $72\sqrt{2}$, ג. $8\frac{1}{4}$, ד. 6, 24
 (7) א. 5, 2, ב. 4, 10, ג. 2.25, ד. 4.6 (8) א. 2, ב. 19.2, ג. 7.2, ד. 10 (9) א. 10, ב. 2.8, 12.8
 (10) $8\sqrt{2}$ (11) 25, 10 (12) 14, $147\sqrt{3}$ (13) $36\sqrt{3}$, $6\sqrt{3}$ (14) 15, 300, קהה-זווית.
 (15) א. 240, ב. 312, ג. $72\sqrt{2}$ (16) א. 2, $\sqrt{13}$, 72, ב. 12.5, 150, ג. 26.9, 660, ד. 17.9, 10.97, 23.18, 10.6
 (17) א. 104, ב. 1110, ג. 78.2, ד. 155.9 (18) א. 624, ב. 300, ג. 96.9, $(56\sqrt{3}=)$ (19) 4
 (20) א. 12, ב. $6\sqrt{13}$, ג. 8, 5.8 (21) 270, 80 (22) א. 14.4, ב. 21.6, ג. 6.6
 (23) 7.04, 12 (24) $48\sqrt{3}$ (25) 9, 18 (26) $6\frac{2}{3}$ (27) 3, 18 (28) 3, 18 (29) 3, 18
 (30) 3, 18 (31) $\frac{3a}{8}$ (32) $\frac{R}{4}$ (33) 90°, 60°, 30° (34) 9.73, 6.29 (35) 10
 (36) 16.96, 3.77, קהה-זווית, 12.8, 0, 12 (37) 96 (38) 148.4 (39) 36, $\sqrt{3}$ (40) 11.4 (41) 30, $\sqrt{5}$ (42) 148.4
 סעיף 6
 (43) א. 24, ב. 1.6, ג. 28π (44) 0.25 (45) 3.5 (46) 2.25, 1.3 (47) 1.3
 (48) א. 9, ב. 0.25, ג. 225π (49) 13 (50) 1.3 (51) 6.28, 1.3 (52) 205.5 (53) 117.9 (54) 1758, 52.3 (55) 3.27, 15.7, א. 15.7, ב. 3.27
 (56) 13.3 סמ"ר (57) א. (R_1+R_2) , ב. $\sqrt{R_1^2+R_2^2}$ (58) 1:2 (59) 4 (60) 16, π (61) $R^2(\sqrt{3}-\pi/2)$ (62) 4
 (63) $(4-\pi)r^2$ (64) 1:2 (65) 4 (66) 16, π (67) $R^2(\sqrt{3}-\pi/2)$ (68) 4

פרק ה: פרופורציה

1. פרופורציה בין מספרים

יחס בין שני מספרים מוגדר כמנה המצומצמת בין שני המספרים. למשל, היחס בין המספרים 27 ו-45 הוא 3:5.

פרופורציה. ארבעה מספרים a, b, c ו- d יוצרים פרופורציה, אם היחס בין שני המספרים הראשונים שווה ליחס בין שני המספרים האחרים; משמע, פרופורציה זהו שוויון בין שני יחסים:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

נהוג לסמן פרופורציה גם בצורה: $(a;b;c;d)$ כאשר a, d נקראים גם אברים חיצוניים ו- b, c אברים פנימיים. המספרים 18, 10, 9, 5 יוצרים פרופורציה, כי $5:9 = 10:18$

1.1 תכונות הפרופורציה

א. מכפלת האברים החיצוניים בפרופורציה שווה למכפלת האברים הפנימיים.

כלומר, אם $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ אז $a \cdot d = b \cdot c$

ב. אם מחליפים את האברים הפנימיים בפרופורציה, במקומותיהם, התוצאה המתקבלת אף היא פרופורציה.

כלומר, אם $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ אז $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ או $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right) \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

ג. לכל פרופורציה קיימת גם הפרופורציה ההפוכה.

כלומר, אם $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ אז $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

ד. אם מחברים למוני היחסים בפרופורציה (או מחסירים מהם) את מכניהם המתאימים, מתקבלת כתוצאה מכך פרופורציה. כלומר,

אם $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ אז $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ וגם $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

ה. היחס בין סכום המונים של פרופורצית שרשרת, לסכום המכנים שווה לכל אחד מהיחסים בסדרה.

כלומר, אם $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k$

אז: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = k$

כדי להוכיח זאת, בטא את ערכי המונים מתוך הנתון:

$$a_1 = kb_1, a_2 = kb_2, \dots, a_n = kb_n$$

והצב אותם במנת הסכומים.

1.2 שימושים - הפרופורציוני הרביעי

איבר חיצוני (פנימי) בפרופורציה שווה למכפלת האיברים הפנימיים (החיצוניים) חלקי האיבר החיצוני (פנימי) האחר. איבר זה מכונה הפרופורציוני הרביעי.

כלומר, אם $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ אז $x = \frac{bc}{a}$

1.3 דוגמאות

א. אם $\frac{3.7}{4} = \frac{5}{x}$ אז $x = \frac{4 \cdot 5}{3.7}$

ב. אם $\frac{x}{5} = 8$ אז $x = 5 \cdot 8$

$$X = \frac{3 \cdot 1}{4} \quad \text{או} \quad \frac{3}{X} = 4 \quad \text{אם} \quad \text{ג.}$$

$$X = \frac{13 \cdot 8}{5 \cdot 2} \quad \text{או} \quad \frac{13}{2X} = \frac{5}{8} \quad \text{אם} \quad \text{ד.}$$

1.4 ממוצע הנדסי

אם שני האברים הפנימיים (חיצוניים) בפרופורציה זהים, אז ערך זה הוא ממוצע הנדסי, של שני האברים החיצוניים (פנימיים), כלומר
 אם $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ או $b^2 = a \cdot c$ או $b = \sqrt{a \cdot c}$
 b הוא ממוצע הנדסי של a ו-c.

למשל, הממוצע ההנדסי של המספרים 8 ו-50 הוא

$$X = \sqrt{50 \cdot 8} = \sqrt{400} = 20$$

ממוצע הנדסי - m של n מספרים $a_1, a_2, \dots, a_n$, מוגדר בעזרת הקשר:

$$m^n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

2. פרופורציה בין קטעים

2.1 רקע

לשני קטעים **מידה משותפת**, אם ניתן למצוא יחידת אורך, הכלולה בכל אחד מהם מספר שלם של פעמים.
יחס בין שני קטעים זוהי המנה בין המספרים המבטאים את אורכיהם. יחס כזה הוא מספר טהור (ללא יחידות).
קטעים פרופורציוניים. ארבעה קטעים נקראים פרופורציוניים, אם היחס בין שניים מהקטעים שווה ליחס בין שני הקטעים האחרים.



הקטעים AB, CD, EF ו-GH הם קטעים פרופורציוניים, כי

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$$

הערה. יתכנו קטעים פרופורציוניים שאינם בעלי מידה משותפת, לכן כל האמור בפרק זה, חל גם עליהם.

הסעיפים הבאים דנים בקטעים פרופורציוניים, המופיעים במסגרת צורות הנדסיות. המשפט הבא (שהוכחנו במסגרת הלימוד על קטע אמצעים) משמש רקע למשפטים בפרק זה.

משפט.

אם קבוצת ישרים מקבילים מקצה על ישר אחד, קטעים שווים זה לזה, היא מקצה על כל ישר אחר, שאינו מקביל להם, קטעים שווים זה לזה.



משפט תאלס

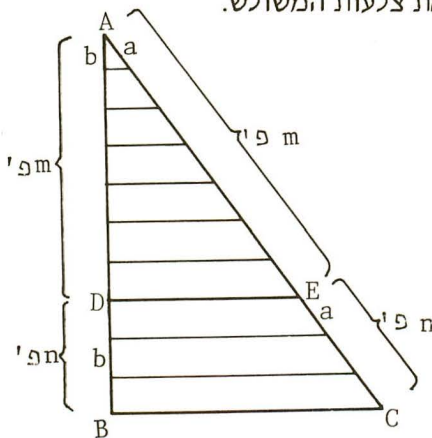
2.2

משפט.

ישר המקביל לאחת הצלעות של משולש, מקצה על שתי הצלעות האחרות, או על המשכיהן, קטעים פרופורציוניים.



נזכיר את המשפט, במקרה שהמקביל חותך את צלעות המשולש.



נתון	$DE \parallel BC, \Delta ABC$
צ"ל	$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$

הוכחה
נניח שהקטעים AE ו-EC הם בעלי מידה משותפת a. AE מכיל את a, m פעמים והקטע EC מכיל אותו n פעמים. ב"ע: מקבילים ל-BC דרך נקודות החלוקה.

על הצלע השנייה מתקבלים קטעים שווים - b

		לפיכך:	$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB} \quad (1)$ { $\frac{AE}{EC} = \frac{ma}{na} = \frac{m}{n}$ $\frac{AD}{DB} = \frac{mb}{nb} = \frac{m}{n}$
מ.ש.ל.			

2.3 יש לשים לב גם לפרופורציות הבאות, שהן שימושיות מאד בפתרון תרגילים. ניתן להוכיח אותן באותה שיטה שבה הוכחנו את (1), או תוך שימוש בתכונות הפרופורציה בין מספרים.

(2) $\frac{EC}{AE} = \frac{DB}{AD}$ (הפרופורציה ההפוכה ל- (1))

(3) $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$ (4) וההפוכה $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$

(5) $\frac{EC}{AC} = \frac{DB}{AB}$ (6) וההפוכה $\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{DB}$

2.4 המקרה השני של המשפט מתייחס למקביל לאחת מצלעות המשולש, החותך את המשכך שתי הצלעות האחרות.

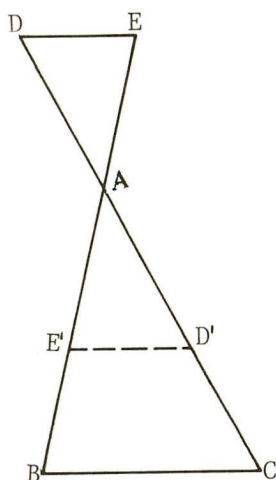
במקרה זה, אם $DE \parallel CB$

אז $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$

ההוכחה בעזרת ב"ע:

$AD' = AD$, $AE' = AE$

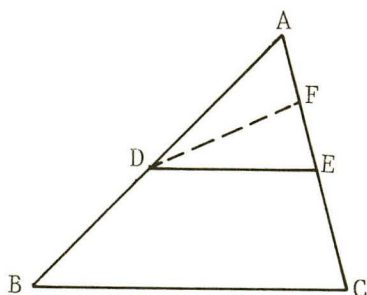
ושימוש בחלק הראשון של המשפט. הוכח!



2.5

משפט (הפוך למשפט תאלס)

אם ישר, החותך שתי צלעות של משולש, מקצה עליהן קטעים פרופורציוניים, הישר מקביל לצלע השלישית.



נתון	$\triangle ABC$ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$
צ"ל	$DE \parallel BC$
הוכחה (בדרך השלילה)	נניח $DE \not\parallel BC$ לכן אפשר לבנות דרך D, ישר DF כך ש $DF \parallel BC$ $\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC}$ וזה סותר את הנתון: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ כי השבר $\frac{AF}{FC}$ קטן מהשבר $\frac{AE}{EC}$ לכן $DE \parallel BC$

מ.ש.ל.

העזר בבי"ע כמו בסעיף 2.4 כדי להוכיח את המשפט במקרה שהישר חותך את המשכי הצלעות.

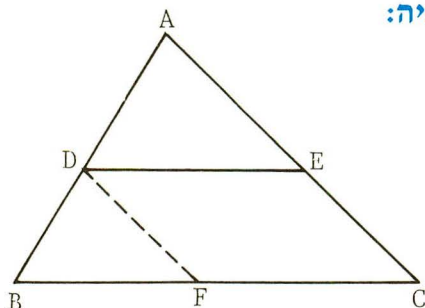
ממשפט תאלס מתקבלים שני המשפטים הבאים, כשהמשפט הראשון חשוב במיוחד, הודות לשימוש הרב בו.

2.6

משפט (הרחבת משפט תאלס)

אם ישר חותך שתי צלעות במשולש ומקביל לצלע השלישית $(DE \parallel BC)$, מתקבלת הפרופורציה:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$$



ההוכחה מתקבלת בעזרת בי"ע:
 $DF \parallel EC$

לפי משפט תאלס: $\frac{AD}{AB} = \frac{FC}{BC}$

והיות ש: $DE = FC$ (DECF מקבילית)

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

מתקבל

2.7



שים לב!

היחס בין המקביל DE ו-BC, הוא כמו היחס בין הקטע AD הקרוב לקודקוד A (מונח מול BC), לכל הצלע AB.

הערה: ההרחבה שבמשפט הנ"ל מתקיימת גם במקרה המתואר בסעיף 2.4

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

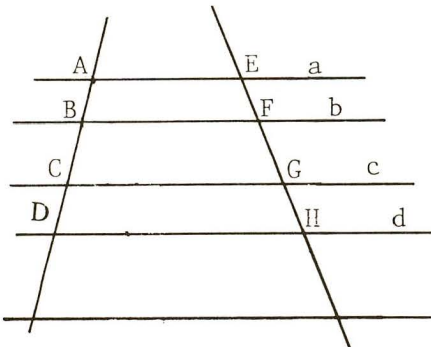
הוכח! (ב"ע $DB \parallel EK$, K על המשך CB)

משפט

2.8



אם קבוצת מקבילים חותכת שני ישרים, היא מקצה עליהם קטעים פרופורציוניים.



כלומר, אם: $a \parallel b \parallel c \parallel d$

$$\text{אז: } \frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH}$$

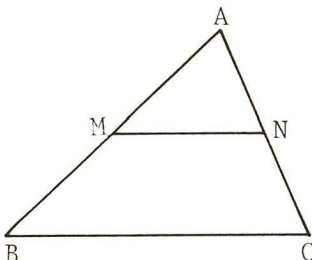
הוכח!

דוגמאות

2.9

דוגמה א'

הוכח: קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
יש להוכיח בדרך שונה מזו שכבר הוכחנו.



הוכחה:

לפי הגדרת קטע אמצעים:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$MN \parallel BC$$

(משפט הפוך למשפט תאלס)

מ.ש.ל. אי

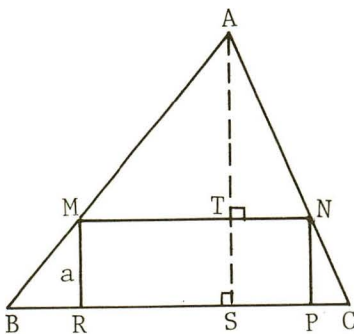
כמו כן, $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$ (לפי המסקנה האחרונה)

לכן $MN = \frac{BC}{2}$

מ.ש.ל. בי

דוגמה ב'

במשולש ABC בנו מלבן, כמתואר בשרטוט. אורכו של המלבן גדול פי שלושה מרוחבו. שטח המשולש ABC הוא 100 סמ"ר והצלע BC שווה ל- 20 ס"מ. חשב את שטח המלבן.



פירוק

מנוסחת שטח המשולש ניתן לחשב

את הגובה AS.

$$AS = 10 \text{ ס"מ}$$

במשולש ABS:

$$(MT \parallel BS) \quad \frac{AM}{AB} = \frac{AT}{AS}$$

ובמשולש ABC: $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$

מشتי הפרופורציות האחרונות מקבלים: $\frac{AT}{AS} = \frac{MN}{BC}$

נניח: $TS = MR = a$ לכן $MN = 3a$

מקבלים $\frac{10 - a}{10} = \frac{3a}{20} \Leftrightarrow a = 4 \text{ ס"מ} \Leftrightarrow MN = 12 \text{ ס"מ}$

ושטח המלבן $S = 12 \cdot 4 = 48 \text{ סמ"ר}$

הקטע BF חותך את צלעות המקבילית ABCD, בנקודות E (את AD) ו-F (את

המשך CD). הוכח: $\frac{AE}{ED} = \frac{CD}{DF}$

הוכחה:

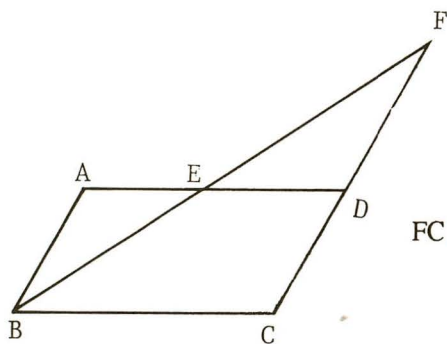
נבדוק את הקטעים שביחס $\frac{AE}{ED}$

קטעים אלה נוצרים ע"י המקבילים FC ו-AB. לכן:

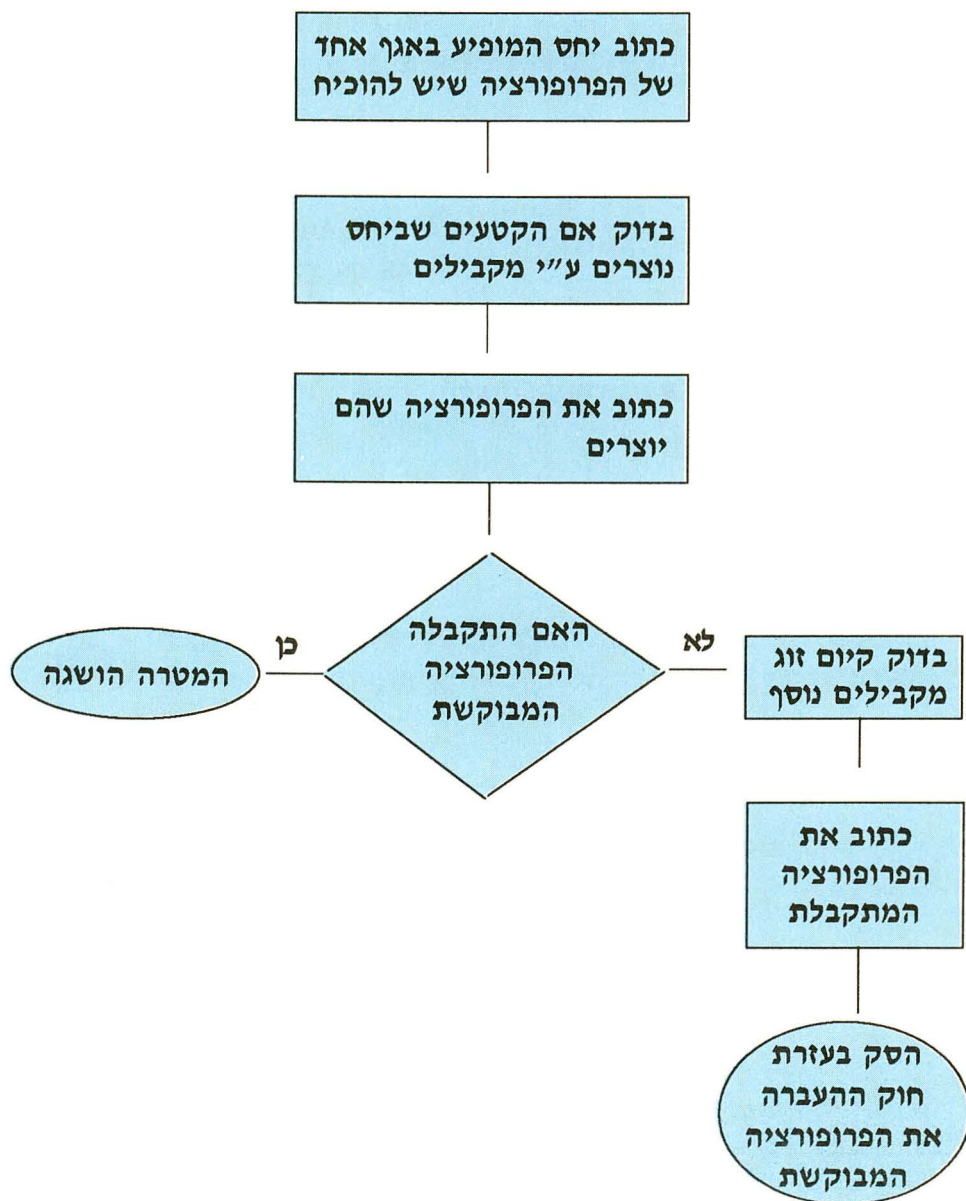
(לפי 2.2) $\frac{AE}{ED} = \frac{BE}{EF}$

הקטעים המשתתפים ביחס הימני נוצרים על ידי המקבילים BC ו-ED.

לכן: $\frac{BE}{EF} = \frac{CD}{DF} \iff \frac{AE}{ED} = \frac{CD}{DF}$ (חוק ההעברה)



הדוגמא האחרונה מדגימה גישה שיטתית להוכחת קיום פרופורציות. נציג שיטה זו בצורה הסכמתית הבאה:



אילו בתרגיל האחרון היה צריך להוכיח קיום שוויון בין שתי מכפלות $BC \cdot FE = ED \cdot FB$, היה כדאי לבדוק קיום פרופורציה הקשורה בארבעת הקטעים הנ"ל.



3. תכונות חוצה-זווית במשולש

3.1 חלוקת קטע ביחס נתון

לחלק קטע AB ביחס $m:n$, פרושו למצוא נקודה C, שרוחקה מקצות הקטע מתיחסים כמו $m:n$

קיימות שלוש אפשרויות למיקום הנקודה C:

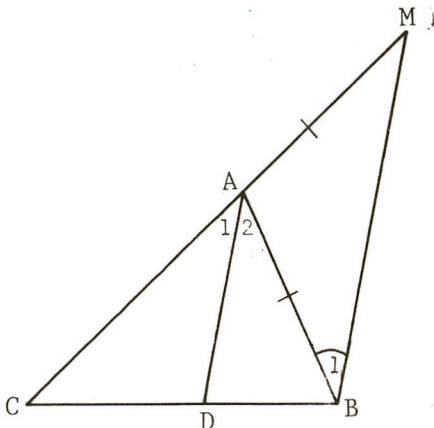
- על הקטע AB - חלוקה פנימית.
- בהמשך הקטע AB - חלוקה חיצונית.
- מחוץ לישר המכיל את AB.

חלוקה הרמונית. אם שתי נקודות מחלקות קטע ביחס נתון - האחת חלוקה פנימית והאחרת חלוקה חיצונית - אז שתי הנקודות מחלקות את הקטע חלוקה הרמונית.

3.2 חוצה-זווית במשולש

משפט

חוצה-זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים, שהיחס ביניהם שווה ליחס בין הצלעות הסמוכות לקטעים אלה. (חלוקה פנימית).



$\triangle ABC$	נתון
$\angle A_1 = \angle A_2$	
$\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB}$	צ"ל
ב"ע: $AD \parallel BM$ (M על המשך CA) $\angle A_1 = \angle M$ (מתאימות בין מקבילים) $\angle A_2 = \angle B_1$ (מתחלפות בין מקבילים) ונתון: $\angle A_1 = \angle A_2$ $\angle M = \angle B_1 \iff$ $AM = AB$ (א) מבנית העזר נובע גם: $\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AM}$ (לפי משפט תאלס) $\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB}$ (לפי א)	הוכחה

מש.ל.

משפט (הפוך)

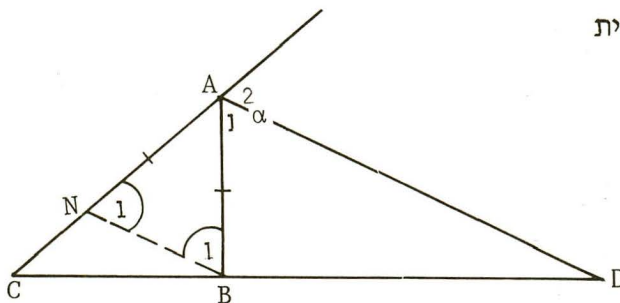
אם נקודה מחלקת צלע של משולש לשני קטעים המתיחסים זה לזה כמו היחס בין שתי הצלעות האחרות, אז הנקודה מונחת על חוצה הזווית שמול צלע זו. הוכח!



3.3 חוצה זווית חיצונית למשולש

משפט

חוצה זווית חיצונית למשולש, מחלק את הצלע שמול קודקוד הזווית - חלוקה חיצונית - ביחס של שתי הצלעות האחרות.



כלומר, אם AD חוצה את הזווית החיצונית A, אז:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}$$

הוכח את המשפט ע"י ב"ע:
BN || AD

שים לב!



כאשר אומרים: "חוצה זווית חיצונית מחלק את הקטע חלוקה חיצונית", וכו', הכוונה היא לשני הקטעים, הנוצרים בין הנקודה D (שבה חותך חוצה הזווית החיצונית את המשך CB), לקצות הקטע CB כלומר, CD ו-BD. הקטע CB אינו משתתף בפרופורציה!

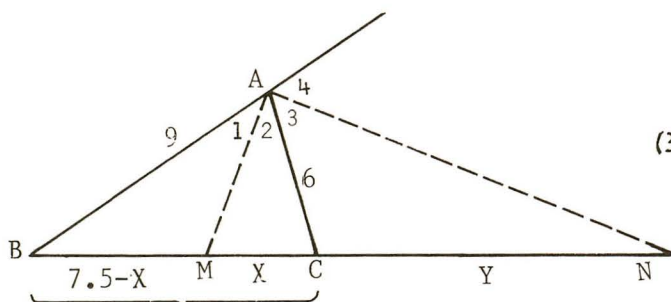
גם למשפט זה קיים משפט הפוך. נסח!

3.4 דוגמאות

דוגמה א'

במשולש ABC: $AB = 9$ ס"מ, $AC = 6$ ס"מ, $BC = 7.5$ ס"מ. AM הוא חוצה הזווית A; AN חוצה הזווית החיצונית ל-A. מצא את היחס בין הקטעים MC ו-NC.

פירוק



נסמן את MC ב-X

ואת CN ב-Y.

במשולש ABC:

$$\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC} \quad (\text{סעיף 3.2})$$

$$\text{או } \frac{7.5 - X}{X} = \frac{9}{6}$$

לכן 3 ס"מ X =

$$\text{במ"כ, } \frac{BN}{CN} = \frac{AB}{AC} \quad (\text{סעיף 3.3})$$

$$\text{או } \frac{7.5 + Y}{Y} = \frac{9}{6} \quad \text{ולכן 15 ס"מ } Y =$$

$$\frac{MC}{NC} = \frac{X}{Y} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

דוגמה ב'

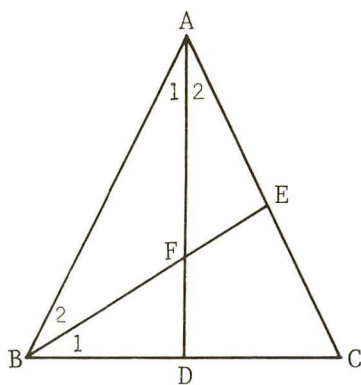
הוכח: במשולש שווה-שוקיים ABC (AB = AC) מתקיים:

$$\frac{r}{h-r} = \frac{a}{2b}$$

כאשר h הגובה לבסיס a,

b אורך השוק ו-r

רדיוס המעגל החסום במשולש.



הוכחה

מרכז המעגל החסום במשולש F - ABC

הוא נקודת מפגש חוצי-הזוויות.

AD חוצה-זווית הראש וגם גובה לבסיס h.

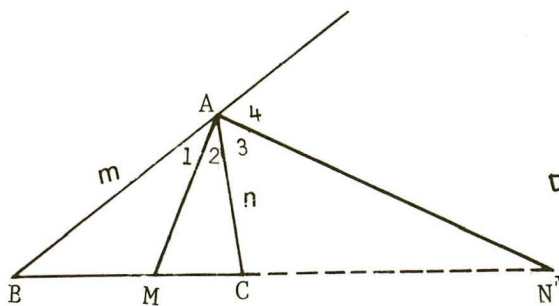
לכן, הקטע FD הוא רדיוס המעגל החסום במשולש r.

במשולש ABD, BF הוא חוצה הזווית B, לכן:

$$\frac{FD}{AF} = \frac{DB}{AB} \quad (\text{לפי 4.2}) \quad \text{או} \quad \frac{r}{h-r} = \frac{a}{2b}$$

משל.

3.5 מעגל אפולוניוס



המשפטים לגבי חוצה זווית פנימית
וחיצונית (סעיף 3.2, 3.3) מאפשרים
למצוא נקודות נוספות במישור, שהיחס
בין רוחקיהן מקצות קטע נתון.
AM ו-AN הם חוצי הזוויות, הפנימית
והחיצונית בקודקוד A, של ΔABC

$$\frac{MB}{MC} = \frac{NB}{NC} = \frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}$$

לכן, גם רוחקי הנקודה A מקצות הקטע BC מתיחסים כמו $n:m$.
מספר הנקודות A המקיימות תנאי זה, אינסופי. המשותף לכולן, שהן משמשות
קודקוד של זווית ראייה לקטע MN. זווית זו ישרה (הזווית בין חוצי זוויות צמודות
ישרה). לכן, הן מונחות על מעגל אחד שקוטרו MN.
ברור, שגם הנקודות M ו-N מונחות על מעגל זה.
ננסה זאת במשפט הבא:

משפט

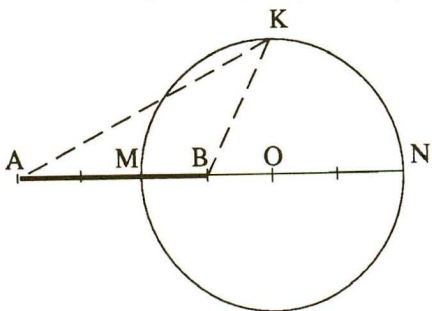
כל הנקודות במישור, שרוחקיהן מקצות קטע מתיחסים לפי יחס נתון, מונחות על מעגל, אשר קוטרו הוא הקטע, שקצותיו מחלקים את הקטע הנתון חלוקה הרמונית.



מעגל זה נקרא מעגל אפולוניוס.

דוגמה

מצא את המקום הגיאומטרי של נקודות, שמחלקות קטע AB, ביחס של 2:1



כדי למצוא את המקום
הגיאומטרי המבוקש יש
לבצע את שני השלבים הבאים:

א. למצוא את הנקודות
M ו-N, המחלקות את
הקטע חלוקה הרמונית
(M - חלוקה פנימית,
N - חלוקה חיצונית).

ב. על הקטע MN כקוטר לשרטט את המעגל O - מעגל אפולוניוס.
כל (נקודותיו (למשל K) מקיימות $KA:KB = 2:1$.

תרגילים

1. חשב את x בפרופורציות הבאות (העזר בתכונות הפרופורציה):

א. $\frac{x}{9} = \frac{4}{3}$ ב. $\frac{4}{5} = \frac{2}{x}$

ג. $\frac{x}{5} = 6$ ד. $\frac{15}{x} = 10$

ה. $\frac{2}{5x} = \frac{4}{25}$ ו. $\frac{8-x}{3} = \frac{x}{5}$

ז. $\frac{20-x}{x} = 3$ ח. $\frac{4x-1}{6x+2} = \frac{2x+3}{3x-6}$

ט. $\frac{2}{x^2} = \frac{25}{72}$ י. $\frac{3x}{45} = \frac{5}{12x}$

2. חשב את הממוצע ההנדסי של המספרים:

א. 15 ; 60 ב. 52 ; 13

ג. 0,9 ; 1000 ד. $\frac{1}{8}$; 72

ה. 2 ; 4 ; 8 ו. $\frac{1}{3}$; 9 ; 72

3. נתונה הפרופורציה $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

הוכח את קיום הפרופורציה $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

4. בטא את היחס x/a בכל אחד מהסעיפים הבאים:

א. $\frac{a+x}{a} = \frac{m}{n}$ ב. $\frac{x}{a+x} = \frac{c}{d}$ ג. $\frac{a+x}{x-a} = \frac{k}{p}$

5. בטא את X באמצעות האותיות שבמשוואה :

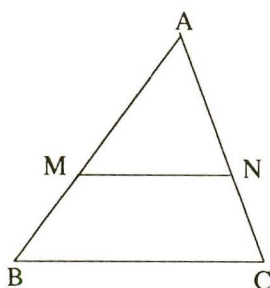
א. $\frac{x+k}{x-k} = \frac{m+k}{m-k}$ ב. $\frac{x-a+1}{x-a-1} = \frac{ax+a+1}{ax-a-1}$

6. בטא את x ואת y באמצעות האותיות המופיעות במערכת (העזר בתכונות הפרופורציה).

א. $\begin{cases} x+y = 2m \\ \frac{x}{y} = \frac{m-n}{m+n} \end{cases}$ ב. $\begin{cases} x+m = y+n \\ \frac{x}{mn} = \frac{2y}{(m^2+n^2)} \end{cases}$

7. הוכח את תכונה ה' (סעיף 1.1).

סעיף 2.



8. בשרטוט נתון $MN \parallel BC$, חשב את הגודל המבוקש

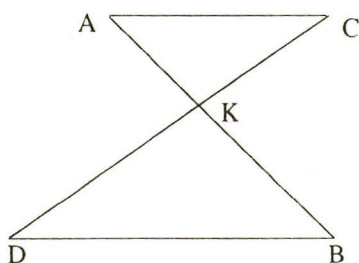
בכל סעיף, בעזרת הגדלים הנתונים (בס"מ).

א. $AN=?$, $NC=6$, $BM=3$, $AM=5$

ב. $NC=?$, $AM=6$, $MB=2$, $AC=12$

ג. $X=?$, $AC=15$, $AM=X-2$, $AN=BM=X$

ד. $AC=?$, $MB=2a$, $AN=4$, $AM=a$



9. שני קטעים AB ו- CD נחתכים

בנקודה K , נתון: $AC \parallel DB$.

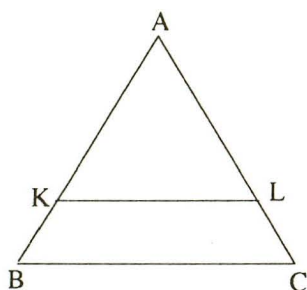
חשב בכל סעיף, את הגודל המבוקש,

בעזרת הערכים הנתונים (בס"מ).

א. $KD=?$, $CK=4$, $KB=5$, $AK=2$

ב. $KB=?$, $DK=9$, $CK=3$, $AB=16$

ג. $AB=?$, $DK=6a$, $KB=15$, $CK=2a$



10. בשרטוט נתון $KL \parallel BC$, חשב את הגודל המבוקש

בכל סעיף (הנתונים ב"ס"מ)

א. $KL=?$, $BC=16$, $KB=3$, $AK=5$

ב. $AL=?$, $BC=12$, $LC=5$, $KL=8$

ג. $AB, LC=?$, $AL=6$, $AK=5$, $BC=3KL$

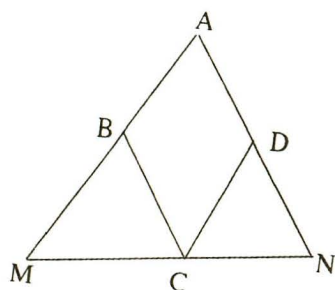
11. התיחס לשרטוט שבתרגיל 9 וחשב את הגודל החסר בכל סעיף.

(הגדלים נתונים ב"ס"מ).

א. $BD=?$, $DK=7.5$, $AC=4$, $CK=5$

ב. $BK=?$, $BD=20$, $AC=10$, $AB=27$

ג. $AB=16$, $DC=20$, $BD=3AC=12$, חשב את היקף $\triangle AKC$.



12. ABCD מעוין. ישר העובר דרך

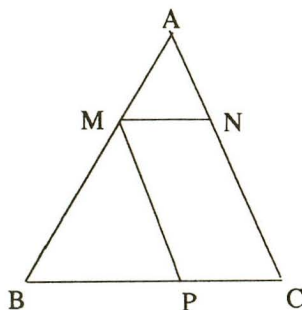
הקודקוד C של המעוין, חותך את

המשכי AB ו-AD, בנקודות M ו-N

באופן כזה, ש:

$DN=3.2$ ס"מ, $BM=5$ ס"מ

חשב את צלע המעוין.



13. במשולש ABC נתון:

$MP \parallel AC$, $MN \parallel BC$,

$AN:NC = 1:3$

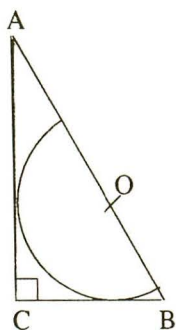
$BP=9$ ס"מ.

חשב את הקטע CP.

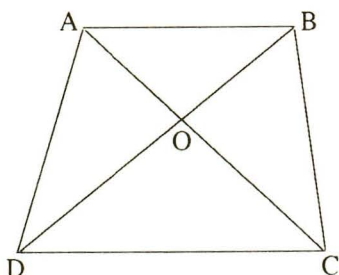
14. בתנאי הבעיה הקודמת ונוסף לזה: F נקודה על BC, כך ש- $BF=4$ ס"מ.

דרך F מעבירים מקביל ל-AC, החותך את AB בנקודה R.

חשב את הקטעים AM, MR ו-RB, אם $AB=6$ ס"מ.

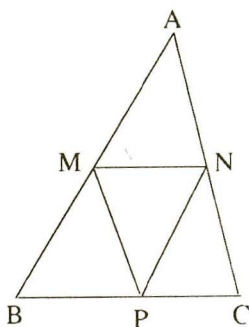


15. במשולש ישר-זווית ABC, שווים הניצבים ל-6 ס"מ ו-8 ס"מ. בתוך משולש זה חסום חצי-עיגול, שמרכזו על היתר. חשב את רדיוס המעגל הזה.

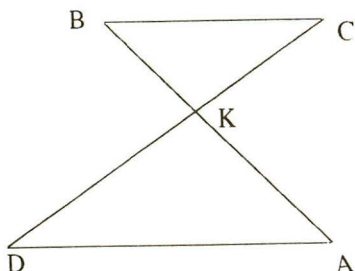


16. בטרפז ABCD, $AB = 9$ ס"מ, $AC = 20$ ס"מ, $BO:OD = 3:7$. חשב את הבסיס הגדול של הטרפז ואת הקטע OC.

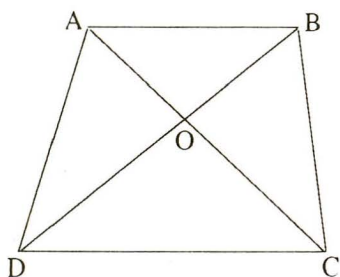
17. בטרפז ABCD, האלכסון AC מאונך לשוק AD. נקודה M. נתון: $DC = 26$ ס"מ, $MC = 14.4$ ס"מ, $BM:BD = 2:5$. חשב את הבסיס הקטן AB ואת השוק AD.



18. התיחס לשרטוט ולנתונים (בס"מ) בכל סעיף, וקבע זוגות של ישרים מקבילים
- א. $AC=8$, $MB=9$, $AN=2$, $AM=3$
- ב. $BP=9$, $MP=PC=6$, $AN=3$, $NC=7$
- ג. $AN=3$, $NC=6$, $AM=4$, $PN=MB=8$



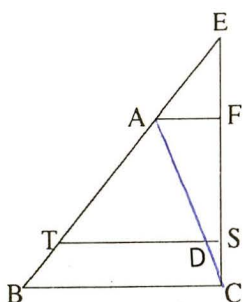
19. הקטעים AB ו-CD נחתכים בנקודה K. נתון:
- 3 בס"מ $AK =$, 2 בס"מ $KC =$
- 1 בס"מ $KB =$, 6 בס"מ $KD =$
- הוכח: $AD \parallel BC$



20. במרובע ABCD נתון

$$AO \cdot OD = BO \cdot OC$$

הוכח, כי המרובע הוא טרפז.



21. בשרטוט נתון משולש EBC. הנקודות

A ו-T על EB, F ו-S על EC.

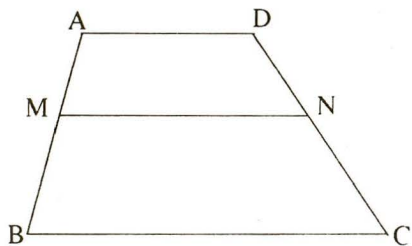
נתון: $BT:TA:AE = 1:3:2$, $AF = 4$ ס"מ,

$SC = 2$ ס"מ, $TS = 10$ ס"מ, $EC = 12$ ס"מ.

א. מצא זווית של ישרים מקבילים. נמק!

ב. חשב את הקטעים: TD ו- EF , BC .

22. הוכח: אם ישר חותך שוקי טרפז, ומקביל לבסיסיו, הרי הוא מקצה על השוקיים קטעים פרופורציוניים. כתוב את כל הפרופורציות המתקבלות.

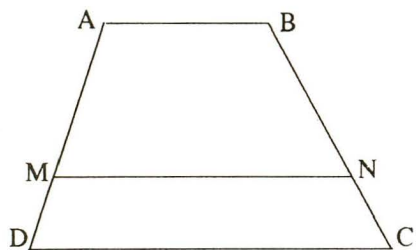


23. בטרפז ABCD, $MN \parallel AD$.

ונתון: $AM = 2.5$ ס"מ,

$DC = 11$ ס"מ, $MB = 3$ ס"מ.

חשב את הקטע NC.

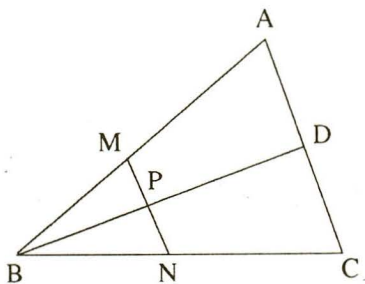


24. הוכח: אם קטע MN החותך

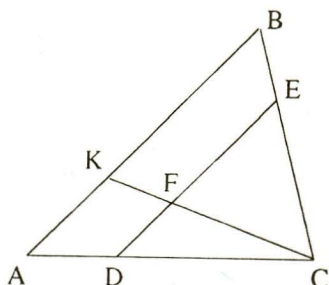
שוקי טרפז ABCD מקצה עליהם

$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

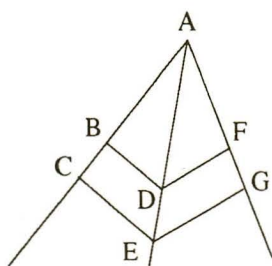
אז הקטע מקביל לבסיסי הטרפז.



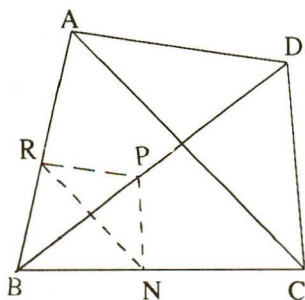
25. הוכח : אם BD תיכון לצלע AC, במשולש ABC, אז כל הקטעים המקבילים לצלע AC (למשל MN) נחצים ע"י התיכון.



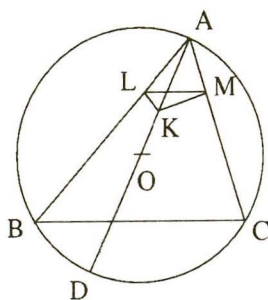
26. הנקודה K מחלקת את הצלע AB ביחס של 1:2 ($AK:KB = 1:2$). הוכח : כל הקטעים המקבילים לצלע AB (למשל DE) מתחלקים ע"י הקטע CK באותו יחס $DF:FE = 1:2$



27. בשרטוט נתון :
 $DF \parallel EG$, $BD \parallel CE$
 הוכח :
 $\frac{BD}{CE} = \frac{DF}{EG}$



28. הצלע BC משותפת לשני המשולשים ABC ו-DBC. דרך הנקודה N, שעל צלע זו, בנו קטעים NP ו-NR באופן כזה, ש- $NP \parallel DC$, $NR \parallel AC$. הוכח כי : $RP \parallel AD$



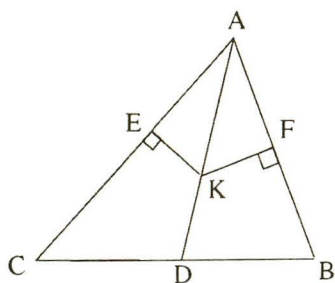
29*. המשולש ABC חסום

במעגל O. K נקודה על

הקוטר AD. נתון: $KL \perp AB$,

$KM \perp AC$

הוכח: $LM \parallel BC$



30*. AD תיכון לצלע BC במשולש

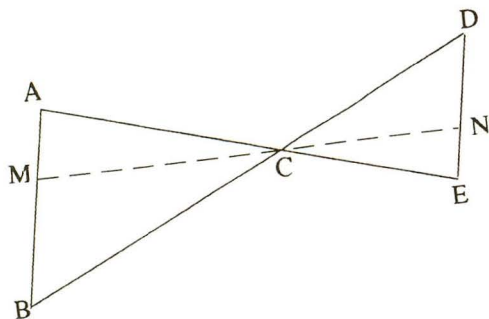
ABC. KE ו- KF אנכים לצלעות

AC ו- AB (K על AD).

הוכח: $\frac{KE}{KF} = \frac{AB}{AC}$

רמז: העזר באנכים מהנקודה D

לצלעות AC ו- AB.



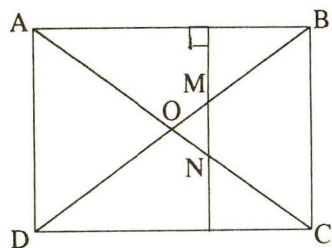
31. הקטע DE חותך את המשכי

צלעות המשולש ABC ומקביל

לצלע AB. M נקודה על AB,

המשך הקטע MC חותך את DE

ב- N. הוכח: $DN \cdot AM = NE \cdot MB$



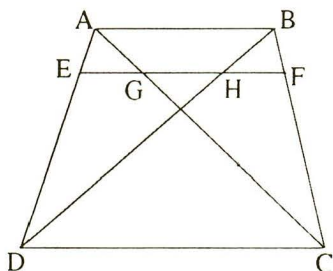
32. ABCD מלבן. נתון: $MN \perp AB$,

$MB:MD = 1:2$, $MN = 4$ ס"מ.

חשב את AD.

33. בטרפז ABCD, הקטע MN מקביל לבסיס AD ועובר דרך נקודת מפגש

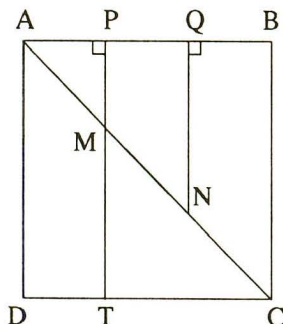
האלכסונים O. הוכח כי MN נחצה בנקודה O.



34. בטרפז $ABCD$, $EF \parallel AB$.

הוכח כי, הקטעים EH

ו- GF שווים זה לזה.



35. אורך צלע הריבוע $ABCD$ - 9 ס"מ.

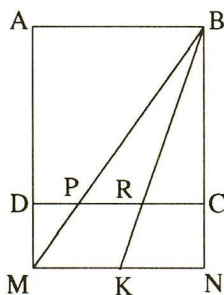
הנקודות M ו- N מחלקות את האלכסון

AC לשלושה קטעים שווים. נתון:

$TP \perp AB$, $NQ \perp AB$ (M עובר דרך P)

חשב: א. את אורך הקטע TC .

ב. את שטח הטרפז $PQNM$.



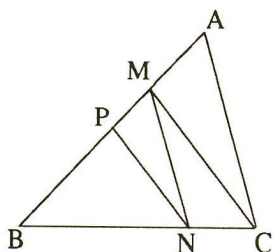
36* $ABCD$ ריבוע שאורך צלעו 2a.

ממשיכים את BC ו- AD בקטעים

CN ו- DM באורך a , כל אחד.

K - אמצע MN ונתון 6 ס"מ $PR =$

חשב את צלע הריבוע.



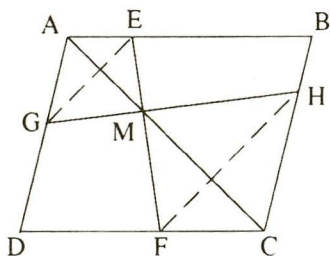
37. במשולש ABC , נתון $MN \parallel AC$

יכן $PN \parallel MC$. הוכח כי BM

הוא ממוצע הנדסי של

הקטעים BP ו- BA .

$$BM^2 = BP \cdot BA$$



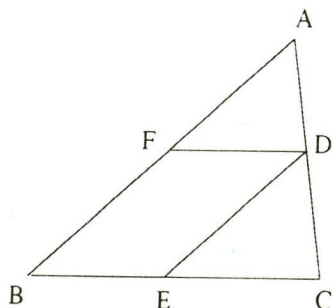
38. M נקודה על האלכסון AC, במקבילית

ABCD. דרך M בנו שני קטעים:

EF (E על AB, F על DC)

ו- GH (G על AD, H על BC).

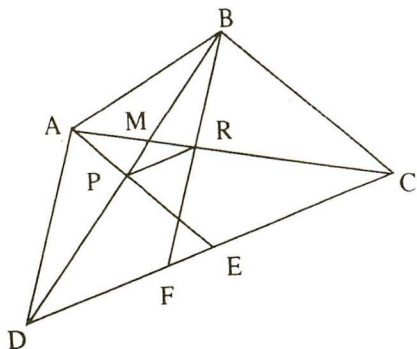
הוכח כי $GE \parallel FH$.



39*. D נקודה על הצלע AC של המשולש ABC

ונתון: $FD \parallel BC$, $DE \parallel AB$

הוכח: $\frac{EC}{BC} + \frac{FA}{BA} = 1$



40*. אלכסוני המרובע ABCD

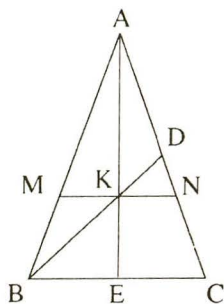
נחתכים ב- M. הקטעים

AE ו- BF מקבילים לצלעות

BC ו- AD, בהתאמה.

הוכח: א- $MP \cdot MC = MD \cdot MR$

ב- $PR \parallel CD$



41*. במשולש ABC ($AB=AC$) נתון:

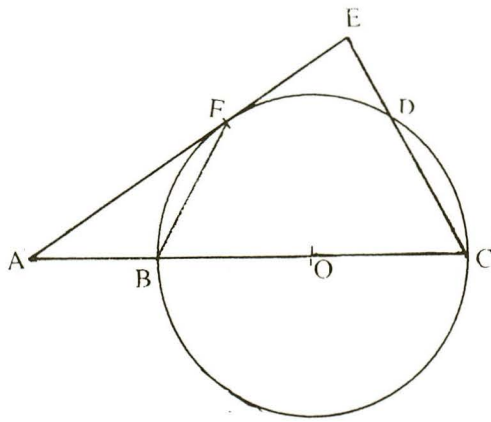
$MN \parallel BC$, $AD=DC$, $AE \perp BC$

(MN עובר דרך נקודת החיתוך K של

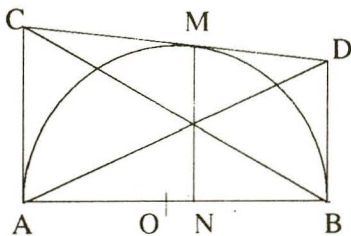
BD ו- AE),

7.5 ס"מ $KD=$, 9 ס"מ $KE=$.

חשב את MN.

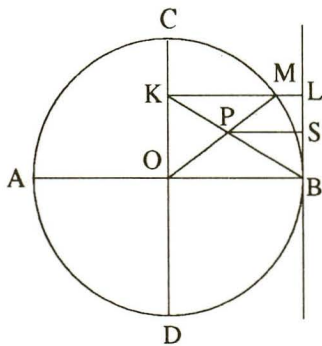


BC של המעגל O (BC קוטר) לשלוש קשתות שוות. בנקודה F משרטטים משיק, החותך את המשך הקוטר CB ב־A, ואת המשך המיתר CD ב־E.

$$\frac{AF}{AE} = \frac{BF}{CE} \quad \therefore$$


הקוטר AB , C ו- D הן נקודות חיתוך המשיקים הני"ל עם משיק שלישי למעגל (בנקודה כלשהי M).

BC עם AD מונחת על הקטע MN.



מאונכים $AB \perp CD$. מנקודה

KL למשיק למעגל בנקודה B

P נקודת המפגש של OM ו-BK.

$PS \perp BL$: הוכח : $PS = OP$

45. שרטט קטע AB שאורכו 12 ס"מ. מצא נקודה C, שתחלק את הקטע, חלוקה

פנימית, ביחס של 3:1 ($AC:BC=$). מהו אורך הקטע BC?

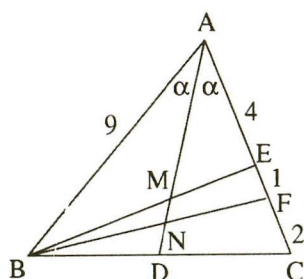
46. שרטט קטע MN שאורכו 5 ס"מ. מצא נקודה O, שתחלק את הקטע חלוקה

חיצונית ביחס של 2:3 ($\text{NO}:\text{MO}=\text{?}$). מהם אורכי הקטעים MO ו-NO?

47. שרטט קטע AB שאורכו 4 ס"מ, מצא שתי נקודות M ו-N, אשר מחלקות את הקטע חלוקה הרמונית ביחס של 3:5 (M על הקטע, N קרובה ל-B). מהם אורכי הקטעים AM ו-BN?

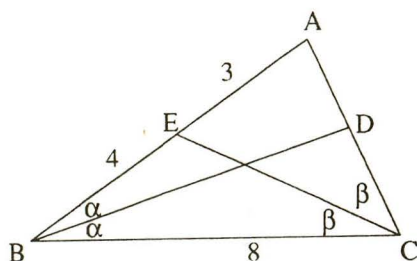
48. התיחס לנתונים שבתרגיל הקודם, ומצא את כל הנקודות במישור, שמחלקות את הקטע ביחס של 3:5.

49. מהו המקום הגיאומטרי, של כל הנקודות במישור, המחלקות קטע שאורכו 8 ס"מ ביחס של 1:3.

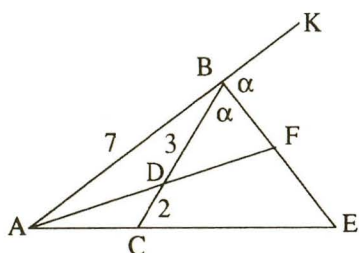


50. התיחס לנתונים שבשרטוט וחשב את היחסים:

א. $\frac{BM}{ME}$ ב. $\frac{NF}{BN}$ ג. $\frac{BD}{BC}$



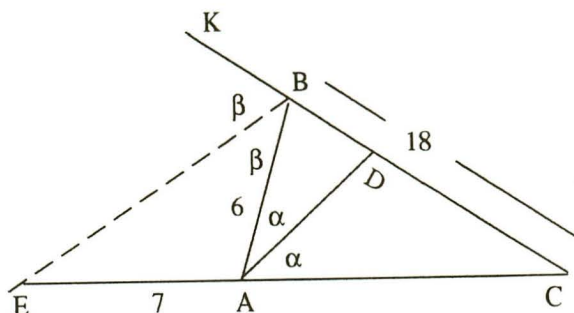
51. התיחס לנתונים שבשרטוט וחשב את AC ואת DC.



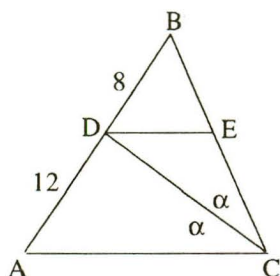
52. הזווית KBC חיצונית למשולש ABC. התיחס לנתונים שבשרטוט

וחשב את היחסים

א. $\frac{CE}{AE}$ ב. $\frac{AF}{DF}$ ג. $\frac{AC}{CE}$

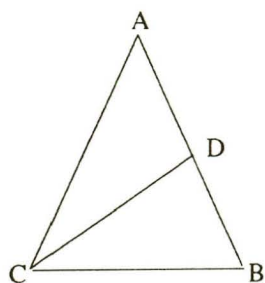


53. הזווית KBA חיצונית
למשולש ABC.
התיחס לנתונים
שבשרטוט, וחשב
את AC ואת BD.



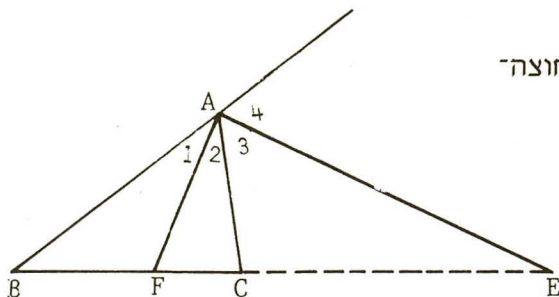
54. חשב את האורך
של DE בשרטוט
אם נתון (נוסף לנתונים
בשרטוט):
 $AC = BC + 5$, $DE \parallel AC$

55. CD חוצה הזווית C במשולש ABC; $DE \parallel AC$ (D על AB, E על BC)
נתון: $BD = AD + 3$, $BC = 24$ ס"מ, $AC = 15$ ס"מ. חשב את היקף הטרפז DECA.



56. CD הוא חוצה-הזווית C,
במשולש שווש ABC
($AB = AC$). נתון:
 $BC = 9$ ס"מ, $BD = 5$ ס"מ.
חשב את שוק המשולש.

57. נתון משולש ABC. BM הוא חוצה-הזווית B ו-BN הוא חוצה הזווית
החיצונית ל-B (M על צלע AC ו-N על המשכה - קרוב ל-C). הוכח:
 $AM \cdot CN = AN \cdot MC$



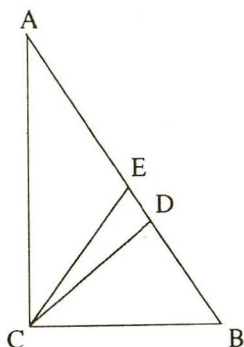
58. AF חוצה-הזווית A, AE חוצה-

הזווית החיצונית A.

נתון: $BC = 12$ ס"מ;

$CE = FC + 3$.

חשב את הקטע BF.



59. CD חוצה את הזווית הישרה

של המשולש ABC. CE - תיכון

ל-AB. נתון: $BC = 5$ ס"מ,

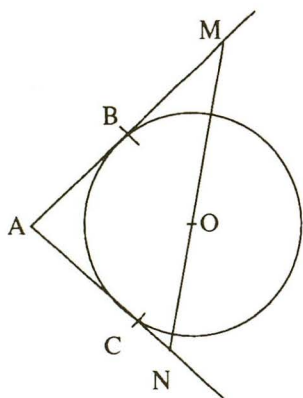
$AC = 12$ ס"מ.

חשב את אורך הקטע ED.

60. במשולש ישר זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$), BD הוא חוצה הזווית B

(D על AC); נתון: $BC = 24$ ס"מ, $AC = 32$ ס"מ.

חשב את הקטעים AD ו-BD.



61*. AB ו-AC - משיקים למעגל O

החותכים קוטר של המעגל

בנקודות M ו-N

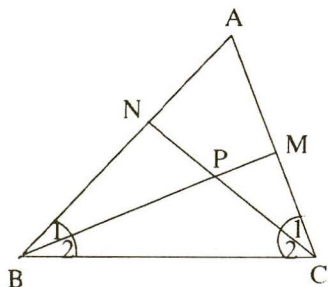
נתון: $AM = 12$ ס"מ, $AN = 8$ ס"מ

א. חשב את היחס בין שטחי

המשולשים AOM ו-AON

ב. חשב את רדיוס המעגל,

אם שטח AMN - 50 סמ"ר.



62. BM ו-CN הם חוצי-זוויות

במשולש ABC. P נקודת המפגש

שלם. נתון: $AC = 10$ ס"מ,

$AN = 5$ ס"מ, $CN = 9$ ס"מ

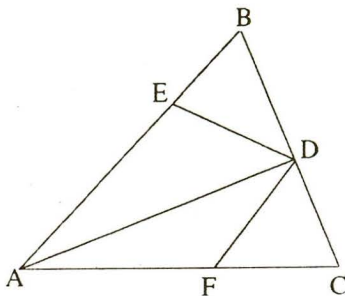
חשב את הקטע CP.

63. במשולש ABC נתון: $AC = BC = 10$ ס"מ, $AB = 16$ ס"מ. BM ו-CN חוצי זוויות (M על AC, N על AB).
חשב את רדיוס המעגל החסום במשולש ABC.

64. במשולש שווש ABC שווה הבסיס ל- $2a$ והשוק ל- b . הוכח כי רדיוס המעגל החסום במשולש שווה ל- $a \sqrt{(b-a)/(b+a)}$



- 65*. AD הוא גובה במשולש שווש ABC ($AB=AC$). התיכון BE (E על AC) חותך את AD ב-M. חוצה הזווית BF (F על AC) חותך את AD ב-N. חשב את אורך הקטע MN אם ידוע $AB = 13$ ס"מ, $BC = 10$ ס"מ.

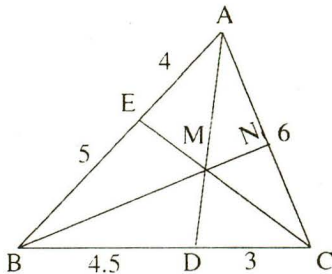


- 66*. AD חוצה-זווית במשולש ABC.

נתון: $BE = DC$, $CF = BD$.

הוכח: א. $\frac{S_{BED}}{S_{DFC}} = \frac{AC}{AB}$

ב. $\frac{S_{ACD}}{S_{ABD}} = \frac{S_{BED}}{S_{DFC}}$



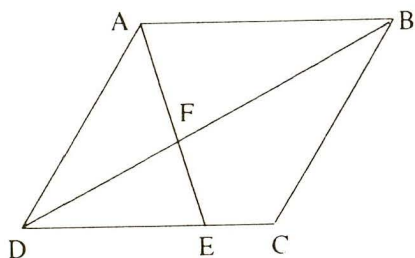
67. הקטעים AD ו-CE נחתכים

בנקודה M.

התיחס לנתונים שבשרטוט

והוכח שהקטע BN, העובר

דרך הנקודה M, חוצה את B.



68. ABCD מקבילית. E נקודה על הצלע

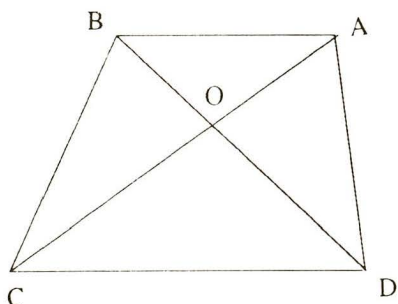
DC, כך ש: $DE = 6$ ס"מ.

האלכסון BD חותך את AE ב-F.

נתון: $AF = 4$ ס"מ, $FE = 3$ ס"מ.

$BC = 8$ ס"מ.

הראה כי ABCD מעוין.



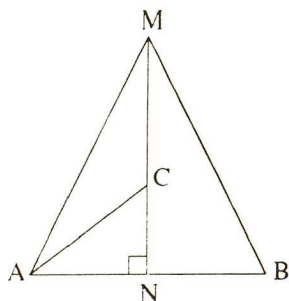
69*. בטרפז ABCD נתון: $AD:DC = 2:5$

$AC = 21$ ס"מ, $OC = 15$ ס"מ

הוכח: הבסיס הקטן שווה לשוק AD.



70*. במעגל שמחוגו 20 ס"מ רשומים שני מיתרים: מיתר AB שרוחקו ממרכז המעגל 16 ס"מ, ומיתר AC שרוחקו מהמרכז 12 ס"מ. מיתר שלישי AD חותך את BC בנקודה E. נתון: $BE:BC = 3:7$. הוכח ש-D אמצע הקשת BC.



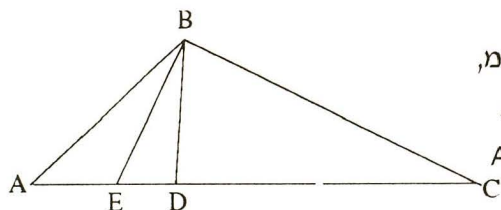
71*. MN אנך אמצעי של הקטע AB שאורכו

10 ס"מ. הקטע AC יוצר על MN

שני קטעים שאורכיהם: $MC = 8\frac{2}{3}$ ס"מ,

$NC = 3\frac{1}{3}$ ס"מ, הוכח כי C הוא מרכז

המעגל החסום במשולש AMB.



72**. אורך הצלע AB במשולש ABC

24 ס"מ. הקטע BD שאורכו 18 ס"מ,

והקטע BE מחלקים את הצלע AC

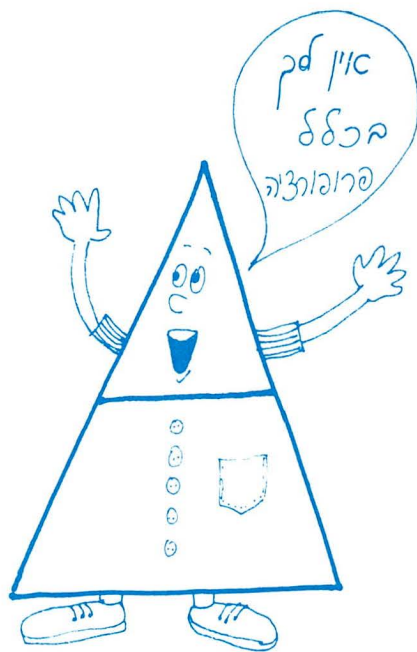
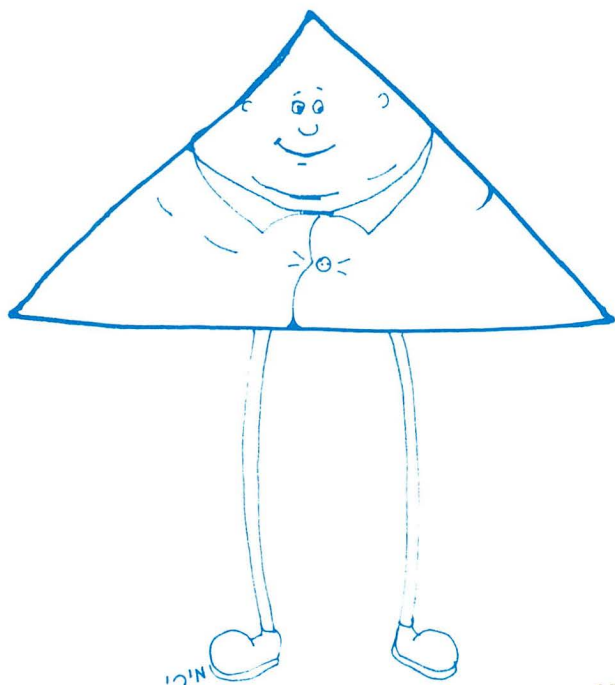
לפי היחס: $AE:ED:DC = 4:3:21$

הוכח: $EB \perp BC$



תשובות

- (1) א. 12, ב. 2.5, ג. 30, ד. 1.5, ה. 2.5, ו. 5, ז. 5, ח. 0, ט. 2.4, י. 2.5.
 (2) א. 30, ב. 26, ג. 30, ד. 3, ה. 4, ו. 6.
 (4) א. $(m-n)/n$, ב. $c/(d-c)$, ג. $(k+p)/(k-p)$.
 (5) א. m , ב. a^2+a .
 (6) א. $(m-n; m+n)$, ב. $[2mn/(m-n); (m^2+n^2)/(m-n)]$.
 (8) א. 10, ב. 3, ג. 2.5 או 6, ד. 12.
 (10) א. 10, ב. 10, ג. 12, ד. 15.
 (12) 4 (13) 3 (14) 1.5, 2.5, 2 (15) 3.4 (16) 21, 14.
 (17) 10, $17\frac{1}{3}$ (18) א. $MN \parallel BC$, ב. $MP \parallel AC$, ג. $PN \parallel AB$.
 (21) א. $BC \parallel TS$, $AF \parallel$ ג. 4, 9, 12.
 (35) 6, 13.5 (36) 18 (41) 16 (45) 9.
 (46) 10, 15 (47) 2.5, 6 (50) 9/4, ב. 5/9, ג. 9/16.
 (51) 6, 3.2 (52) א. 5/7, ב. 7/3, ג. 2/5.
 (53) 14, 5.4 (54) 6 (55) 38.46 (56) 11.25.
 (58) 9 (59) 2.67 (60) 20, $12\sqrt{5}$.
 (61) א. 2/3, ב. 5 (62) 6 (63) $2\frac{2}{3}$, 2/3.

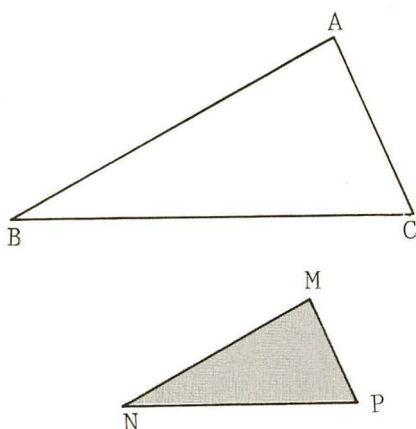


פרק ו: דמיון משולשים ומצולעים

1. דמיון משולשים

1.1 שני משולשים נקראים **משולשים דומים**, אם כל זוויותיהם שוות - אחת לאחת - וכל צלעותיהם פרופורציוניות.

למשל, המשולשים ABC ו-MNP דומים, אם הם מקיימים את התנאים הבאים:



$$\angle A = \angle M \quad \text{א.}$$

$$\angle B = \angle N$$

$$\angle C = \angle P$$

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP} \quad \text{ב.}$$

* הצלעות הפרופורציוניות נקבעות לפי היותן מונחות מול זוויות שוות.
* היחס הקבוע בין כל שתי צלעות מתאימות, במשולשים דומים, נקרא **יחס הדמיון**. נהוג לסמן אותו באות k



למשל:

$$\frac{AB}{MN} = k$$

דמיון מציינים באמצעות הסמל $\sim$. למשל: $\triangle ABC \sim \triangle MNP$

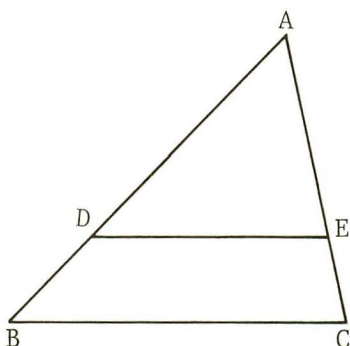
1.2 את המסקנה שהתקבלה ממשפט תאלס ניתן לנסח מנקודת ראות חדשה, כמשפט יסודי של דמיון משולשים:

משפט

ישר, המקביל לצלע של משולש, חותך ממנו משולש דומה למשולש הנתון.



הסבר



לפי מסקנה ממשפט תאלס

קיים: $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$

וקיים גם שוויון בין שלוש הזוויות של המשולשים.

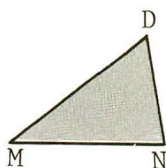
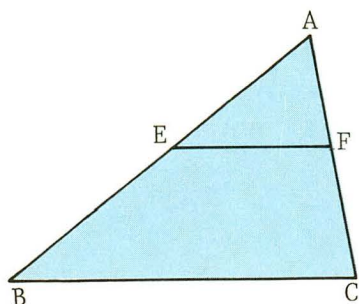
1.3 הגדרת הדמיון מערבת שישה מרכיבים של כל משולש. קיימת אפשרות להסיק ששני משולשים דומים, ע"ס שלושה מרכיבים בלבד, וזאת באמצעות משפטי הדמיון.

2. משפטי הדמיון

משפט דמיון ראשון

2.1

אם שתי צלעות במשולש אחד, פרופורציוניות לשתי צלעות במשולש אחר, והזוויות הכלואות ביניהן שוות, המשולשים דומים.



כלומר, אם: $\frac{AB}{DM} = \frac{AC}{DN}$

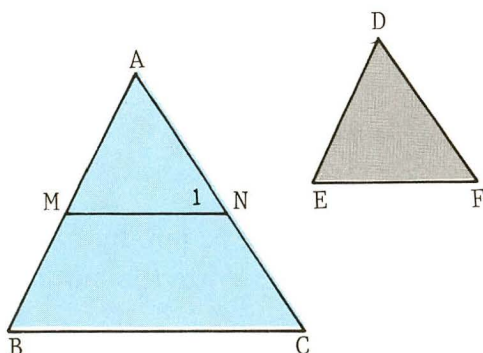
ו- $\angle A = \angle D$

אז $\triangle ABC \sim \triangle DMN$

נ ניתן להוכיח את המשפט בעזרת משולש AEF חופף למשולש DMN - ע"י העתקת DM ו-DN על AB ו-AC בהתאמה - ושימוש במשפט 1.2.

2.2 משפט דמיון שני

אם שתי זוויות במשולש אחד, שוות בהתאמה, לשתי זוויות של משולש אחר, שני המשולשים דומים.



כלומר, אם $\angle A = \angle D$

$\angle C = \angle F$

אז: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

ניתן להוכיח את המשפט ע"י יצירת משולש AMN החופף למשולש DEF (העתקת DF על AC ובניית $\angle N1 = \angle F$) ושימוש ב-1.2.

גם משפט זה, מתיחס לשלושה מרכיבים של כל משולש (שלוש זוויות), אך בהסתמך על כך, שסכום זוויות המשולש 180° מספיק לבדוק שוויון שתי זוויות בלבד.



2.3 משפט דמיון שלישי

אם שלוש הצלעות של משולש אחד, פרופורציוניות בהתאמה, לשלוש הצלעות של משולש אחר, שני המשולשים דומים.



כלומר, אם: $\frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = \frac{DE}{AB}$ (לפי שרטוט קודם)

אז: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

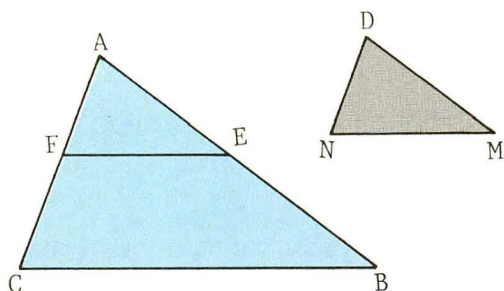
מוכיחים את המשפט ע"י העתקת DE ו-DF על AB ו-AC בהתאמה, הסקת מסקנה על השוויון $MN = EF$ ושימוש ב-1.2.

2.4

משפט דמיון רביעי



אם שתי צלעות במשולש אחד פרופורציוניות לשתי צלעות של משולש אחר, והזוויות המונחות מול הצלע הגדולה (מבין השתיים), בכל משולש, שוות זו לזו, המשולשים דומים.



כלומר, אם: $\frac{DN}{AC} = \frac{DM}{AB}$

$\angle C = \angle N$ - ו

כאשר $AB > AC$

אז: $\triangle ABC \sim \triangle DMN$

התנאים לדמיון משולשים מקבילים לתנאי החפיפה של שני משולשים, כאשר ההבדל הוא שבמשפטי הדמיון הצלעות המתאימות פרופורציוניות ואילו בחפיפה הן שוות זו לזו; הזוויות בשני המקרים שוות זו לזו.



2.5

מסקנות

- א. כל המשולשים, שווי-הצלעות דומים.
- ב. משולשים שווי-שוקיים, השווים בזווית אחת (זווית הראש או זווית בסיס) דומים. (מ.ד. II).
- ג. משולשים ישרי-זווית, השווים בזווית חדה - דומים (מ.ד. II).
- ד. משולשים ישרי-זווית, שבהם שני ניצבים, או ניצב ויתר פרופורציוניים - דומים (מ.ד. I או מ.ד. IV). הסבר!
- ה. כל המשולשים, שהם ישרי-זווית ושווי שוקיים דומים. (מ.ד. I או מ.ד. II).

2.6 שיטת עבודה

בדומה למשפטי החפיפה, כך גם משפטי הדמיון מאפשרים - ע"ס שלושה מרכיבים במשולש - לקבל מסקנה לגבי שלושת המרכיבים האחרים.

- נדון במקרה, שבו מעורבים ארבעה קטעים ויש להוכיח:
- מנה בין שניים מהקטעים, שווה למנה בין שני הקטעים האחרים;
 - או:
 - מכפלת שני קטעים, שווה למכפלת שני הקטעים האחרים.

להלן צעדים אפשריים לפתרון הבעיה:

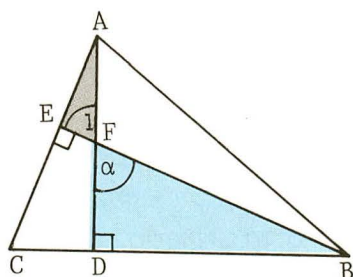




הדרך השכיחה ביותר להסיק מסקנה משני משולשים דומים, היא בסיוע משפט דמיון שני, לכן כדאי לבחון תחילה את זוויות שני המשולשים.

2.7 דוגמה

הוכח: שני גבהים במשולש מחלקים זה את זה, באופן כזה, שמכפלת הקטעים של אחד, שווה למכפלת הקטעים של השני.
יש להוכיח: $AF \cdot FD = BF \cdot FE$ (ראה שירטוט)



הוכחה:

ארבעת הקטעים הנ"ל שייכים למשולשים הדומים AFE ו-BFD (II. ד.מ.)

לכן: $\frac{AF}{BF} = \frac{FE}{FD}$

$AF \cdot FD = BF \cdot FE \quad \leftarrow$
מ.ש.ל.

שים לב!



- כדי למנוע טעויות ברישום הפרופורציה, כדאי:
 - לרשום את שני המשולשים הדומים, זה מתחת לזה.
 - לרשום על יד המשולש העליון את כל צלעותיו, כמונים של יחסים:

למשל, $\frac{\triangle AFE}{\triangle BFD} \quad \frac{AE}{?} = \frac{AF}{?} = \frac{FE}{?}$

- לרשום במכנים את הצלעות המתאימות, כלומר צלעות המונחות מול זוויות שוות.

למשל, ל-AE שבמשולש AEF, מתאימה BD שבמשולש BFD כי שתיהן מונחות מול הזוויות השוות F1 ו-F2.
מתקבל

$$\frac{\Delta AFE}{\Delta BFD} = \frac{AE}{BD} = \left(\frac{AF}{FB} = \frac{FE}{FD} \right)$$

- לבחור את שני היחסים, המכילים את המרכיבים, שבסעיף צ"ל.

3. תכונות של משולשים דומים

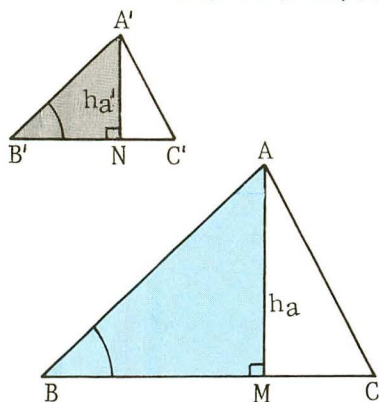
בסעיף זה נציג קטעים פרופורציוניים, המתקבלים במשולשים דומים. המושג "יחס הדמיון k", שיופיע במהלך המשפטים הבאים, יציין את היחס בין שתי צלעות מתאימות במשולשים הדומים ABC ו-A'B'C', למשל: $k = \frac{a}{a'}$

3.1 משפט

במשולשים דומים, גבהים מתאימים מתיחסים זה לזה כיחס הדמיון.



גבהים מתאימים הם גבהים השייכים לצלעות מתאימות במשולשים דומים.



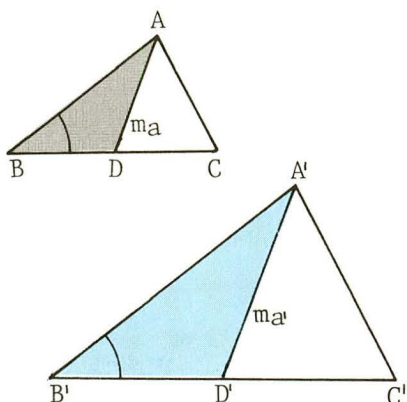
$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ $A'N \perp B'C', AM \perp BC$	נתון
$\frac{h_a}{h_{a'}} = k$	צ"ל
$\Delta ABM \sim \Delta A'B'N$ (II. ד. מ.) לפי $\angle M = \angle N$ (90°) $\angle B = \angle B'$ (מדמיון המשולשים ABC ו-A'B'C') $\frac{h_a}{h_{a'}} = \frac{AB}{A'B'} = k \Leftarrow$	הוכחה

מ.ש.ל.

משפט

3.2

במשולשים דומים, תיכונים מתאימים מתיחסים זה לזה כיחס הדמיון.



$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ $BD = DC$ $B'D' = D'C'$	נתון
$\frac{m_a}{m_{a'}} = k$	צ"ל
$\Delta ABD \sim \Delta A'B'D'$ (מ.ד. II) לפי	הוכחה

$$\angle B = \angle B' \quad (1) \quad (\text{מדמיון המשולשים המקוריים}).$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{2BD}{2B'D'} = \frac{BD}{B'D'} \quad (2)$$

$$\frac{m_a}{m_{a'}} = k \quad \text{או} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BD}{B'D'} \quad \text{לכן:}$$

מ.ש.ל.

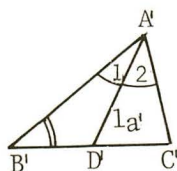
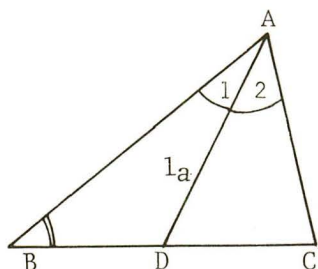
משפט

3.3

במשולשים דומים, החוצים של זוויות מתאימות מתיחסים זה לזה כיחס הדמיון:



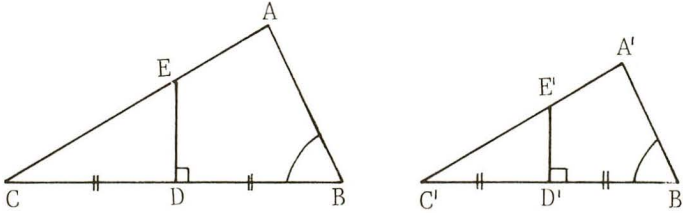
$$\frac{l_a}{l_{a'}} = k$$



משפט 3.4

במשולשים דומים, האנכים האמצעיים המתאימים

מתיחסים זה לזה כיחס הדמיון: $\frac{ED}{E'D'} = k$



משפט 3.5

במשולשים דומים, קטעים אמצעיים מתאימים, מתיחסים זה לזה כיחס הדמיון.

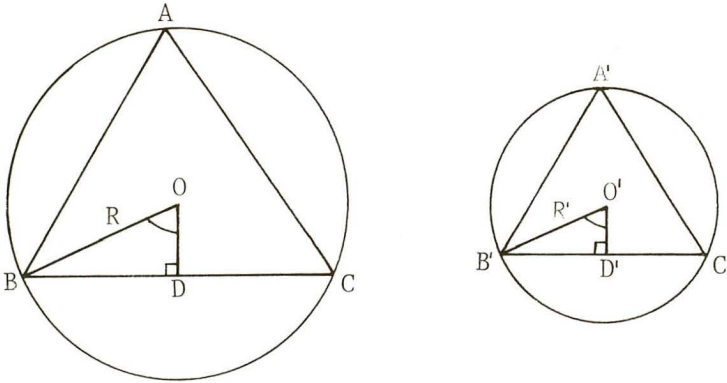


משפט 3.6

מחוגי המעגלים החוסמים משולשים דומים מתיחסים זה לזה כיחס הדמיון:



$$\frac{R}{R'} = k$$



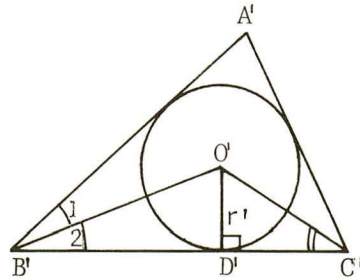
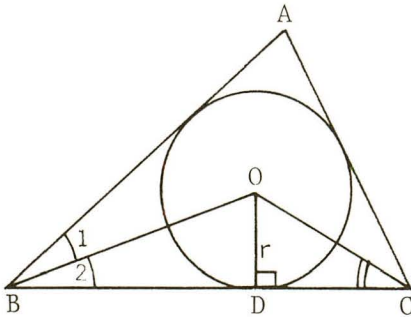
משפט

3.7

מחוגי מעגלים, החסומים במשולשים דומים, מתיחסים



כיחס הדמיון: $\frac{r}{r'} = k$



משפט

3.8

היקפי משולשים דומים מתיחסים זה לזה כיחס הדמיון:



$$\frac{P}{P'} = k$$

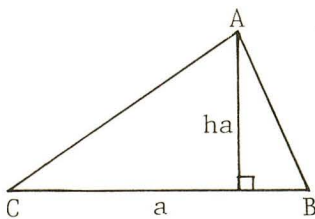
אפשר להוכיח את המשפט - הוכחה אלגברית - ע"ס פרק ה' סעיף 1.1 ה'.

משפט

3.9

שטחי משולשים דומים מתיחסים זה לזה כריבוע יחס

הדמיון:

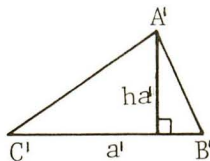


כאשר שטח ABC $\frac{S}{S'} = k^2$
ו-שטח A'B'C' S'

הוכחה:

$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{1}{2} a \cdot h_a}{\frac{1}{2} a' \cdot h_{a'}} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{h_a}{h_{a'}} = k \cdot k = k^2$$

מ.ש.ל.



4. קטעים פרופורציוניים במשולש ישר-זווית.

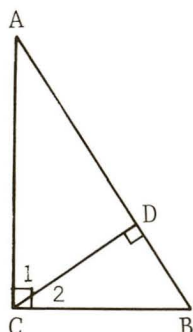
4.1 משפט

הגובה ליתר במשולש ישר זווית, מחלק את המשולש לשני משולשים דומים, וכל אחד מהם דומה למשולש המקורי.



כלומר : $\triangle ACD \sim \triangle CBD \sim \triangle ABC$

ה/כ"ה



במשולש ישר-זווית, הגובה ליתר מחלק את המשולש לשני משולשים, שזוויותיהם שוות בהתאמה, וכן שוות לזוויות המשולש המקורי: $\angle C_1 = \angle B$ כי שתיהן משלימות את $\angle A$ ל 90° ובאותו אופן: $\angle C_2 = \angle A$.
לכן מתקבל דמיון המשולשים (מ.ד.ו.).

ממשפט זה נובעים שני משפטים על ממוצעים הנדסיים במשולש ישר-זווית.

4.2 משפט

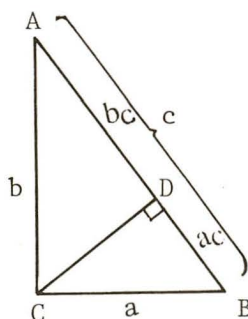
כל ניצב במשולש ישר זווית הוא ממוצע הנדסי של היתר והיטלו של אותו ניצב על היתר



כלומר $a^2 = c \cdot ac$

או $b^2 = c \cdot bc$

ה/כ"ה



לפי המשפט הקודם:

$\triangle BDC \sim \triangle ABC$

לכן,

$$\frac{\triangle BDC}{\triangle ABC} \quad \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB} = \frac{CD}{AC}$$

$$a^2 = c \cdot ac \quad \text{או} \quad \frac{ac}{a} = \frac{a}{c} \quad \text{או}$$

משפט זה הוא ניסוח אחר של משפט אויסקלידס (השווה פרק ד' סעיף 1.1)

4.3 משפט

במשולש ישר זווית, הגובה ליתר הוא ממוצע הנדסי של היטלי הניצבים על היתר.



$$h^2 = a_c \cdot b_c \quad \text{כלומר}$$

הוכחה:

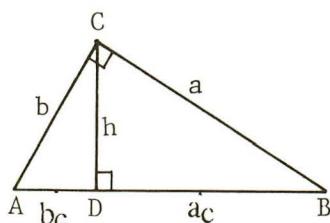
$$\triangle ACD \sim \triangle BDC$$

לכן,

$$\frac{\triangle ACD}{\triangle BDC} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{BD} = \frac{DA}{CD}$$

$$\frac{h}{a_c} = \frac{b_c}{h} \quad \text{או}$$

$$h^2 = a_c \cdot b_c \quad \Leftarrow$$



מ.ש.ל

4.4 משפט (הפוך ל- 4.2)

אם צלע במשולש היא ממוצע הנדסי של צלע אחרת, והיטלה על הצלע האחרת, אז המשולש הוא ישר-זווית והצלע השנייה היא יתר במשולש זה.



4.5 משפט (הפוך ל- 4.3)

אם הגובה לאחת הצלעות במשולש הוא ממוצע הנדסי של היטלי שתי הצלעות האחרות עליה, אז המשולש הוא ישר-זווית. הזווית הישרה היא זו שממנה יוצא הגובה הנ"ל



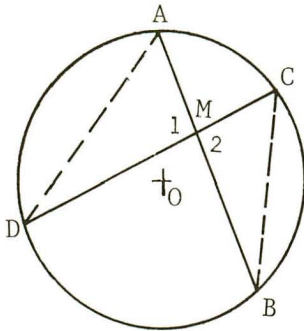
שני המשפטים ההפוכים מתייחסים למקרה שבו ההטל המוזכר מתקבל על הצלע ולא על המשכה.

5. קטעים פרופורציוניים במעגל

בסעיפים הבאים, נבחן תכונות של קטעים במעגל, הקשורות לפרופורציה.

5.1 משפט

אם שני מיתרים נחתכים במעגל, אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר האחר.

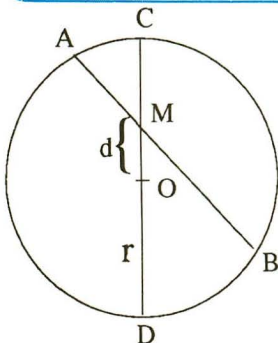


נתון	מעגל O מיתרים AB, CD
צ"ל	$AM \cdot MB = CM \cdot MD$
הוכחה	במשולשים ADM ו-CBM: $\angle M_1 = \angle M_2$ (קודקודיות) $\angle A = \angle C$ (היקפיות הנשענות על קשת אחת) $\triangle ADM \sim \triangle CBM$ (II.ד.מ.) $\Leftarrow$ $\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM} \Leftarrow$ $AM \cdot MB = CM \cdot MD \Leftarrow$ מ.ש.ל.

מסקנה:

5.2

אם נקודה M נמצאת בתוך מעגל, שמחוגו r ברוחק d ממרכזו, אז מכפלת קטעי המיתרים, הנחתכים בנקודה זו היא גודל קבוע ושווה ל- $r^2 - d^2$



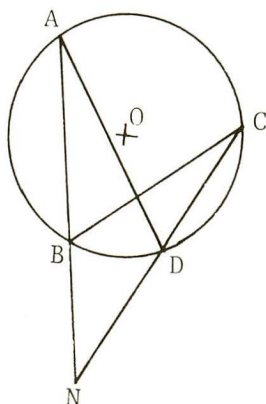
כלומר: $AM \cdot MB = r^2 - d^2$
הוכח!

משפט

5.3



אם מנקודה שמחוץ למעגל, יוצאים שני חותכים למעגל, אז מכפלת חותך אחד, בחלק החיצוני שלו שווה למכפלת החותך האחר בחלקו החיצוני



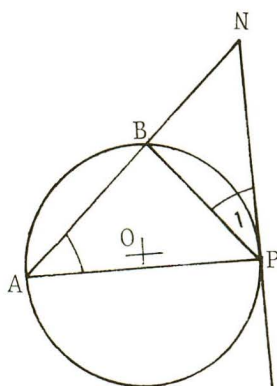
נתון	מעגל O NA ו-NC חותכים את המעגל
צ"ל	$AN \cdot BN = CN \cdot DN$
הוכחה	במשולשים $\triangle ADN$ ו-$\triangle CBN$: $\angle A = \angle C$ נמק'! $\angle D = \angle B$ (זוויות אנכיות) $\triangle ADN \sim \triangle CBN \iff$ $\frac{AN}{CN} = \frac{DN}{BN} \iff$ $AN \cdot BN = CN \cdot DN \iff$ מ.ש.ל

משפט

5.4



אם שני ישרים, היוצאים מנקודה אחת מהווים חותך ומשיק לאותו מעגל, הרי אורך המשיק הוא ממוצע הנדסי של החותך והחלק החיצוני שלו.



נתון	מעגל O NP משיק NA חותך
צ"ל	$NP^2 = AN \cdot BN$
הוכחה	ב"ע $\triangle PAB$ ו-$\triangle PNA$ נבדוק משולשים $\triangle PAB$ ו-$\triangle PNA$ משותפת $\angle A = \angle B$ (זוויות חיתוך) $\angle P = \angle P$ (זווית משותפת) $\triangle PAB \sim \triangle PNA \iff$ $\frac{NP}{PA} = \frac{PA}{PB} \iff$ $NP^2 = PA \cdot PB$

$\sphericalangle A = \sphericalangle P1$ (נמק!)	הוכחה
$\triangle PAN \sim \triangle PBN$ (II. ד.מ.)	
$\frac{PN}{AN} = \frac{BN}{PN}$	
$PN^2 = AN \cdot BN$	

מ.ש.ל

מסקנה

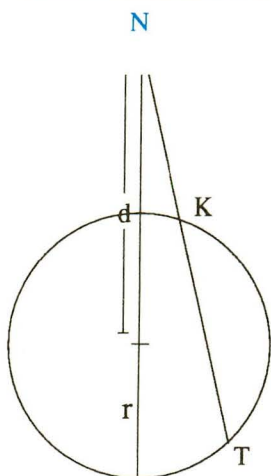
5.5

אם נקודה N נמצאת מחוץ למעגל שמחוגו r, במרחק d ממרכז המעגל, אז מכפלת כל חותך היוצא מ-N, בחלק החיצוני שלו הוא גודל קבוע ושווה ל- $d^2 - r^2$

כלומר:

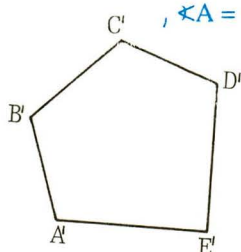
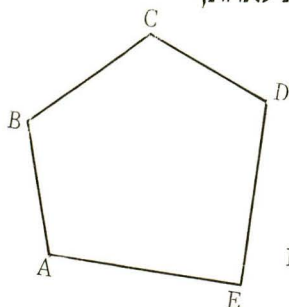
$$NK \cdot NT = d^2 - r^2$$

זוהי שווה גם לריבוע המשיק למעגל, היוצא מהנקודה N.



6. מצולעים דומים

6.1 שני מצולעים הם דומים, אם זוויותיהם שוות אחת לאחת, וצלעותיהם המתאימות פרופורציוניות.



$$\frac{AE}{A'E'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} \quad \text{אם}$$

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A', \quad \sphericalangle B = \sphericalangle B', \quad \sphericalangle C = \sphericalangle C'$$

$$\sphericalangle E = \sphericalangle E', \quad \sphericalangle D = \sphericalangle D'$$

$$ABCDE \sim A'B'C'D'E' \quad \text{אז}$$

מסקנה:

מצולעים משוכללים, בעלי אותו מספר צלעות דומים. נמק!

למצולעים דומים, שתי תכונות המתיחסות - אחת להיקפיהם, והאחרת לשטחיהם.

משפט

6.2

היקפי מצולעים דומים מתיחסים זה לזה כיחס הדמיון

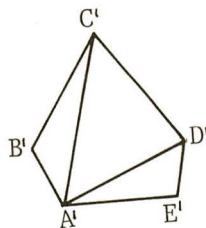
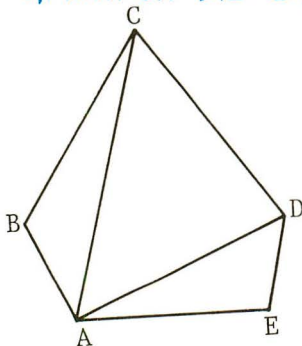


אפשר להוכיח את המשפט ע"ס פרק ה', סעיף 1.1 ה'.

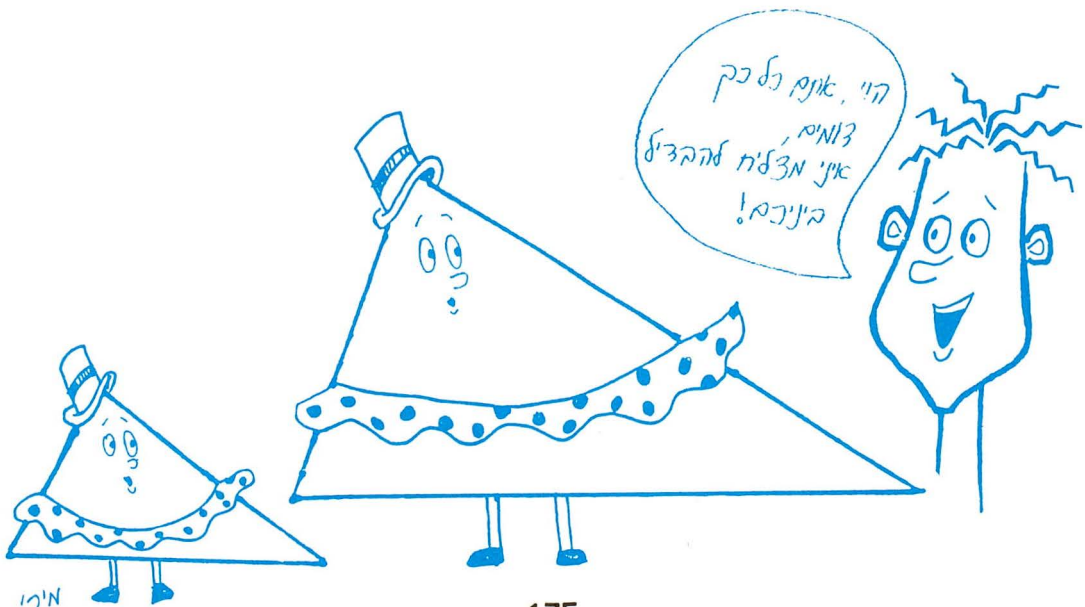
משפט

6.3

שטחי מצולעים דומים מתיחסים זה לזה, כריבוע יחס הדמיון.



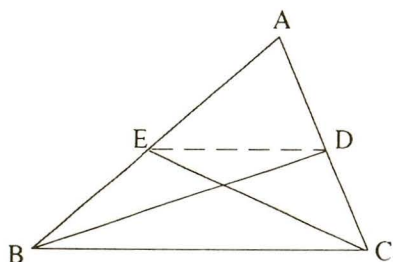
כדי להוכיח את המשפט,
חלק את המצולעים למשולשים;
הוכח לגביהם דמיון, והעזר
בפרק ה' סעיף 1.1 ה' לקבלת
היחס בין השטחים.



תרגילים

סעיף 1

פתור את התרגילים 1-6 ללא שימוש במשפטי הדמיון.

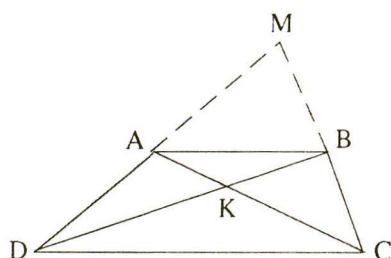


1. BD ו-CE תיכונים במשולש ABC.

הוכח: $\triangle AED \sim \triangle ABC$

האם יש זוג נוסף של

משולשים דומים? נמק!

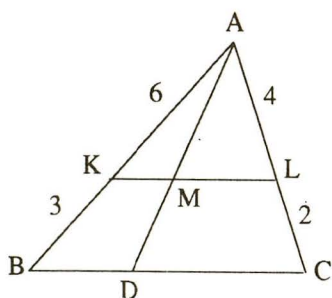


2. שוקי הטרפז ABCD נפגשות

בהמשכיהן בנקודה M.

א. הוכח: $\triangle AMB \sim \triangle DMC$

ב. מצא זוג נוסף של משולשים דומים.

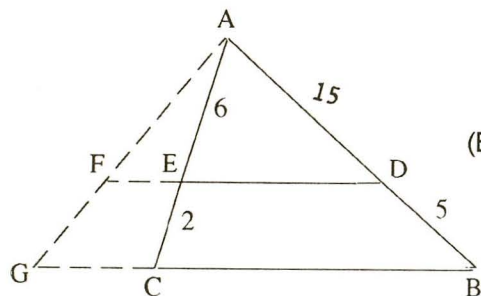


3. התיחס לנתונים שבשרטוט

והוכח:

א. $\triangle AKM \sim \triangle ABD$

ב. $\triangle AML \sim \triangle ADC$

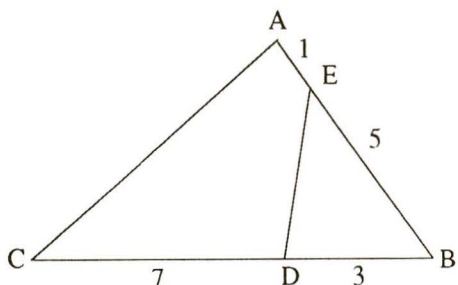


4. התיחס לנתונים שבשרטוט

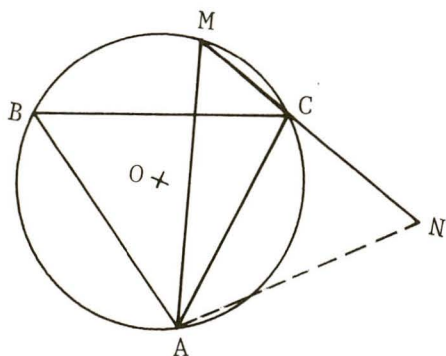
(FE המשך של ED, CG המשך של BC)

והוכח: א. $\triangle ADF \sim \triangle ABG$

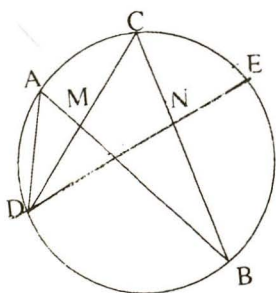
ב. $\triangle AEF \sim \triangle ACG$



10. התייחס לנתונים שבשרטוט והוכח, כי המרובע AEDC בר-חסימה.



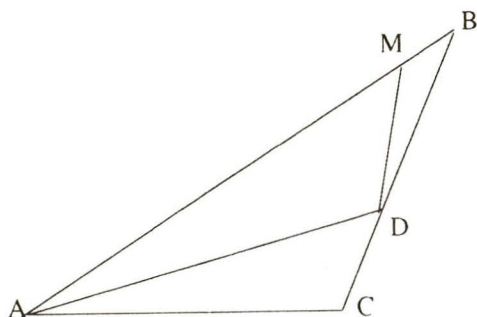
11. במעגל O, שני מיתרים שווים AB ו-BC. M נקודה על הקשת BC. על הישר העובר דרך MC הקצו קטע MN השווה ל-MA. הוכח: $AB \cdot AN = AM \cdot AC$



12. בשרטוט נתון: $AM = 8$ ס"מ, $CM = 11$ ס"מ, $DM = 7$ ס"מ, $AD = CN = 12$ ס"מ. הוכח: א. $\triangle CND \sim \triangle AMD$. ב. C אמצע הקשת AE.

13. במרובע ABCD נתון: $AM \cdot MD = BM \cdot MC$ (M נקודת מפגש האלכסונים).

איזה סוג מרובע הוא? נמק!



14. AD חוצה הזווית A במשולש ABC.

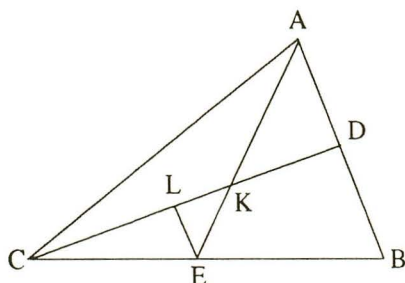
הנקודה M נמצאת על AB, כך שחוצה הזווית הוא ממוצע הנדסי של AM ו-AC. הוכח: א. $\triangle MAD \sim \triangle DAC$. ב. $\angle MDB = \angle BAD$.



15* . AE ו- CD תיכונים במשולש ABC .

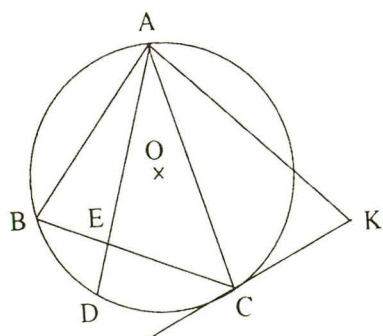
נתון : $LK = 1/4 CK$

הוכח : $\triangle EKL \sim \triangle AKD$



16. ההמשך של EL חותך את AC בנקודה F .

הוכח : $BD : FL = AK : KE$

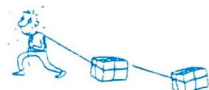
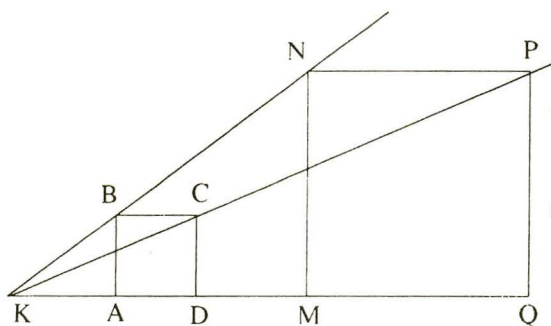


17** . בשרטוט נתון : D אמצע קשת BC

במעגל O . CK משיק למעגל בנקודה C ,

נתון : $EC = CK$.

הוכח : המרובע $AECK$ בר-חסימה.



18** . בתוך זווית K רשומים שני ריבועים

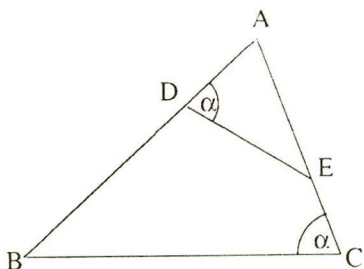
$ABCD$ ו- $MNPQ$ כך ששניים

מקודקדיהם של כל אחד, על השוק

KQ , וקודקוד שלישי על השוק KN .

הוכח : KCP קו ישר.

רמז : הוכח כי המשולשים KCD ו- KPQ דומים.



סעיף 2.2

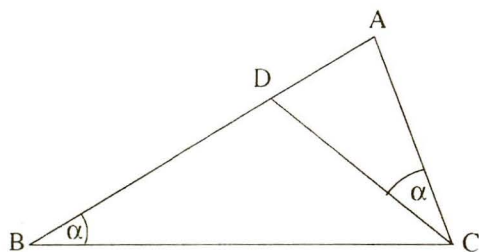
19. התיחס לנתונים שבשרטוט.

א. הוכח : $AE \cdot AC = AD \cdot AB$

ב. חשב את BC , אם נתון

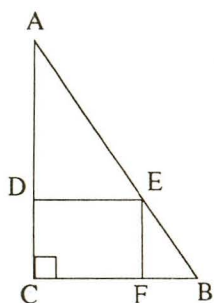
$DE = 4$ ס"מ, $AE : AB = 2 : 3$

20. M אמצע הצלע AB של משולש ABC. הקטע MN (N על AC) חותך מהמשולש מרובע ברוחסימה BMNC. נתון: $AN = 12.5$ ס"מ, $NC = 3.5$ ס"מ. חשב את AB.

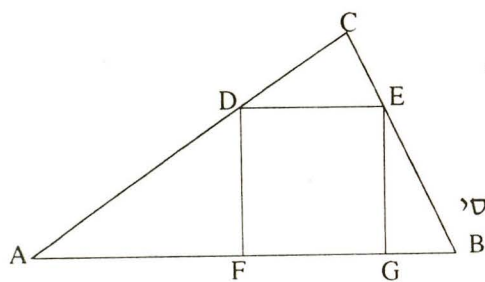


21. התייחס לנתונים שבשרטוט.
א. הוכח, כי AC הוא ממוצע הנדסי של AD ו-AB.
ב. נתון $AD = 4$ ס"מ, $DB = 12$ ס"מ. חשב את AC.

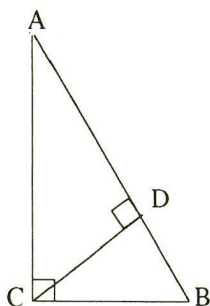
22. בדלתון ABCD (A, C קודקודי הראש, O נקודת מפגש האלכסונים) נתון: $\angle A = 140^\circ$, $\angle C = 40^\circ$.
א. הוכח כי $\triangle ABO \sim \triangle DCO$.
ב. הוכח: $AO \cdot OC = BO \cdot OD$.



23. במשולש ישר-זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$) חסום מלבן DEFC. הוכח: $\triangle ADE \sim \triangle EFB$.
חשב את DE, אם נתון $AC = 12$ ס"מ, $BC = 5$ ס"מ.
וכן $CF = 2EF$.

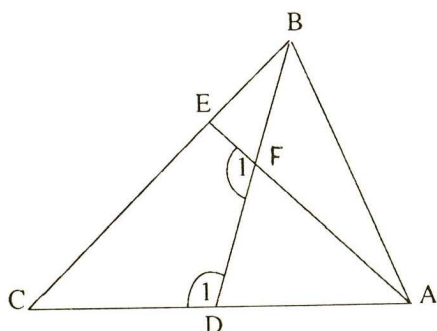


24. הריבוע EDFG חסום במשולש ABC ($\angle C = 90^\circ$), כמתואר בשרטוט. הוכח:
א. $\triangle DCE \sim \triangle AFD \sim \triangle EGB$.
ב. צלע הריבוע היא ממוצע הנדסי של הקטעים AF ו-GB.



25. נתון: $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$), $CD \perp AB$,
 א. הוכח: $\triangle CDA \sim \triangle ABC$
 ב. נתון: $BD = 3$ ס"מ, $CB = 9$ ס"מ;
 חשב את AB בעזרת דמיון משולשים.

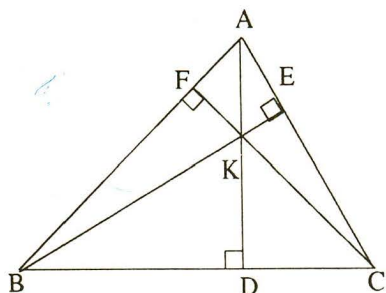
26. ABC משולש שווש ($AB=AC$). D נקודה על AC כך ש: $BD=BC$.
 הוכח $BD^2 = AB \cdot CD$



27. BD הוא חוצה הזווית B ב- $\triangle ABC$.
 הקטע AE יוצר עם BD זווית F_1
 השווה ל- $\angle D_1$
 הוכח: א. $AB:BC = BF:BD$
 ב. $AD \cdot BD = BF \cdot DC$

28. בטרפז ישר-זווית $ABCD$ ($AB \parallel CD$, AD השוק הקצרה), מאונך האלכסון BD לשוק BC . הוכח, כי BD הוא ממוצע הנדסי של בסיסי הטרפז.

29. $ABCD$ טרפז $BC \parallel AD$. הקטע MN עובר דרך נקודת מפגש האלכסונים (M על AD , N על BC).
 הוכח, כי מכפלת קטעי הבסיסים הסמוכים לשוק אחת של הטרפז, שווה למכפלת קטעיהם הסמוכים לשוק האחרת: $BM \cdot AN = MC \cdot ND$.



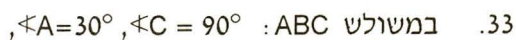
30. הוכח: נקודת מפגש גבהי המשולש מחלקת אותם באופן כזה, שמכפלות קטעיהם שוות:
 $AK \cdot KD = CK \cdot KF = BK \cdot KE$


$$\frac{ND}{DM} = \frac{BC}{AB} \quad \text{הוכח:}$$


DN_LAM

ב. חשב את DN, כאשר 5 ס"מ $a =$

b = 7



MC חותך את AB ב-N.

ב. נתון $NB=a$.

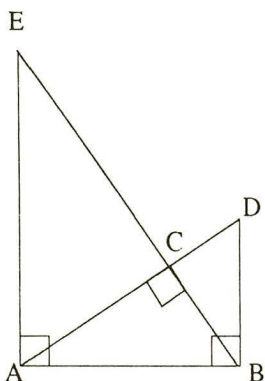
בטא את BC ואת AN בעזרת a



המשך BC ב-F.

נתון: $BC=n$, $AC=m$

בטא את FC באמצעות מ ו- ח.



35* . $\triangle ABC$ ישר-זווית ב- C . האנכים ליתר

AB , בקצותיו חותכים את המשכי

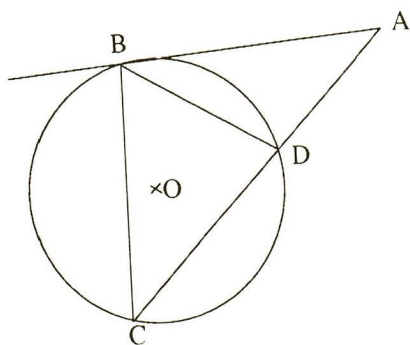
הניצבים AC ו- BC ב- D ו- E ,

בהתאמה. הוכח: $\frac{CD}{CE} = \frac{BC^3}{AC^3}$

36. במעגל O , רשומים שני מיתרים AB ו- CD הנחתכים בנקודה M .

הוכח: א. $\triangle AMC \sim \triangle MDB$

ב. $AD:BC = AM:MC$



37. CD - מיתר במעגל O . המשיק למעגל

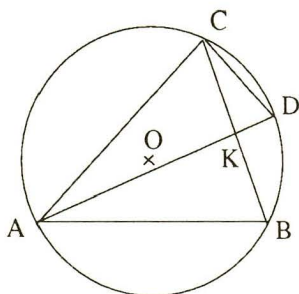
בנקודה B , חותך את המשך CD ב- A .

הוכח:

א. $\triangle ABD \sim \triangle ABC$

ב. חשב את AD , אם:

$AB = 12$ ס"מ, $CD = 10$ ס"מ.



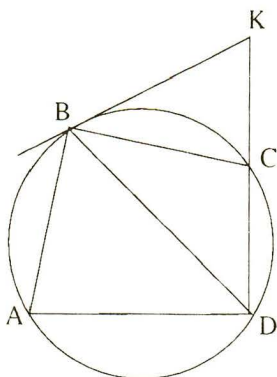
38. $\triangle ABC$ חסום במעגל O . AD חוצה

את הזווית A , וחותך את BC ב- K .

הוכח: א. $\triangle ACD \sim \triangle CKD$

ב. $\triangle AKB \sim \triangle ADC$

ג. אם $AC \perp CD$, אז $AB = AC$



39. המרובע $ABCD$ חסום במעגל O .

נתון: $AB = BC$. המשיק למעגל

בנקודה B חותך את המשך DC

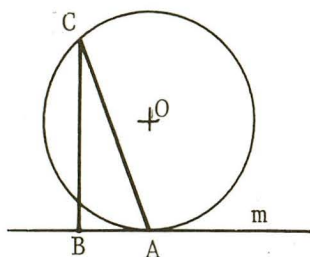
בנקודה K . הוכח:

א. $\triangle ABD \sim \triangle BCK$

ב. $BD \cdot CK = BC \cdot BK$

40. המשולש ABC חסום במעגל O. התיכון AD (D על BC) חותך את המעגל

בנקודה E. הוכח: $EB \cdot AB = EC \cdot AC$



41. m משיק למעגל O בנקודה A.

AC מיתר, $CB \perp m$.

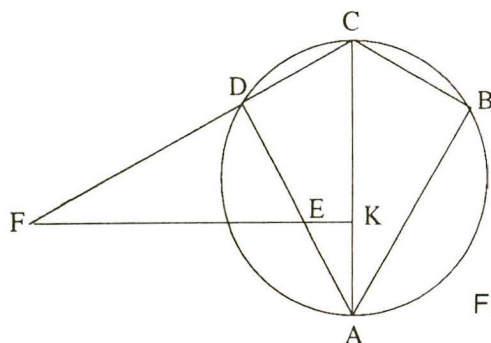
הוכח, כי AC הוא ממוצע

הנדסי של BC וקוטר המעגל.



*42. הוכח קוטר המעגל החוסם משולש שווה למכפלת שתי צלעות

במשולש, מחולקת בגובה לצלע השלישית.



43. במעגל שמחוגו 5 ס"מ חסום

דלתון ABCD. האנך לאלכסון

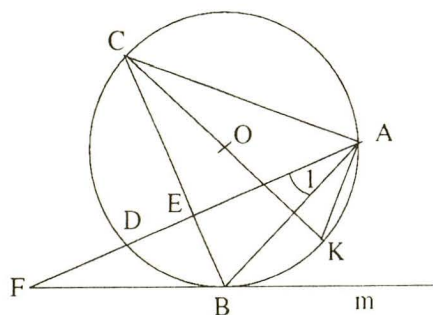
AC בנקודה K, חותך את AD

בנקודה E, ואת המשך CD ב-F.

א. הוכח $\triangle ABC \sim \triangle FDE$

ב. נתון $BC = 6$ ס"מ, $FD = 7.2$ ס"מ.

חשב את ED ו-AE.



44. $\triangle ABC$ חסום במעגל O. $BC = AC$.

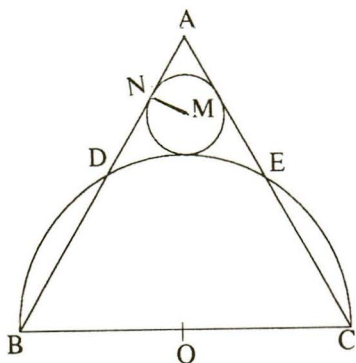
m משיק למעגל בנקודה B. CK קוטר.

המיתר AD יוצר זוויות שוות

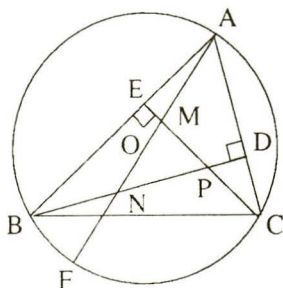
עם AB ועם m ($\angle F = \angle A_1$).

הוכח: א. $BC \perp AD$

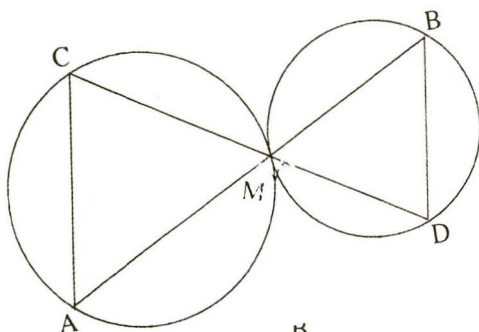
ב. $\triangle FBE \sim \triangle CAK$



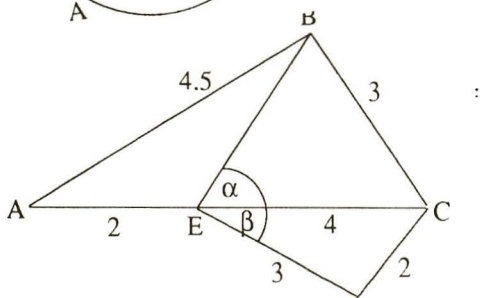
45. במשולש ABC ($AB = AC$), שווים הבסיס וגובהו ל- $2a$, כ"א. על בסיס המשולש בנוי חצי עיגול O . המעגל M משיק למעגל O ולשוקי המשולש. הוכח, כי רדיוס המעגל M שווה ל- $a(\sqrt{5} - 1)/4$



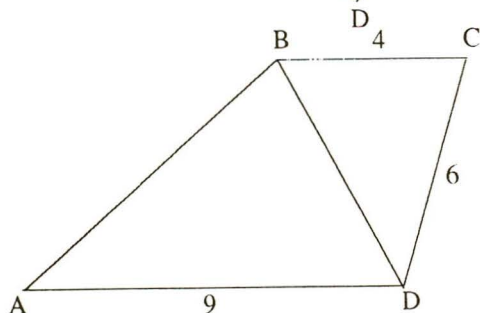
- 46*. המשולש ABC חסום במעגל O . הגבהים BD ו- CE נחתכים ב- P והם חותכים את הקוטר AF בנקודות N ו- M , בהתאמה. הוכח: $\triangle ABC \sim \triangle PNM$



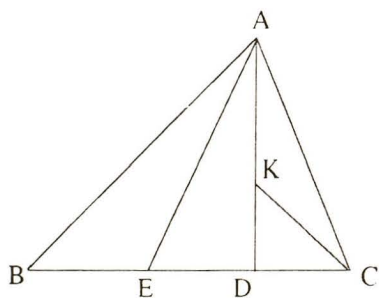
- 47*. שני מעגלים משיקים בנקודה M . דרך M עוברים הישרים AB ו- CD (ראה שרטוט). הוכח: $AM:MB = CM:MD$



- סעיף 2.3
48. התיחס לנתונים שבשרטוט והוכח:
א. $\triangle ABC \sim \triangle EDC$
ב. $\alpha > \beta$



49. במרובע $ABCD$ נתון $DC=BD$, $AB=AD$. העזר בנתונים שבשרטוט והוכח:
א. $\triangle ABD \sim \triangle DCB$
ב. $BC \parallel AD$



50*. הנקודות D ו-E מחלקות את הצלע

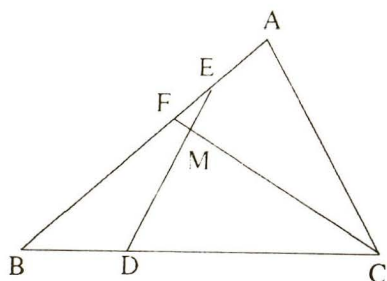
BC של $\triangle ABC$ לשלושה קטעים

שווים. K אמצע הקטע AD ;

$$AB = 2CK$$

הוכח: א. AD גובה במשולש ABC,

ב. $\triangle AEC$ משולש שווה שוקיים.



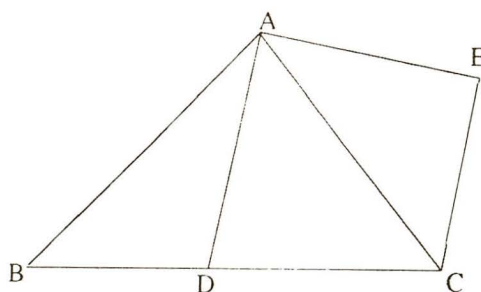
51. הנקודה D חותכת את הצלע BC

כך ש- $DC = 3BD$, הקטעים DE

ו- CF נחתכים כך ש:

$$MC = 0.75AB, MD = 0.75AC$$

הוכח: $\angle FME = \angle A$



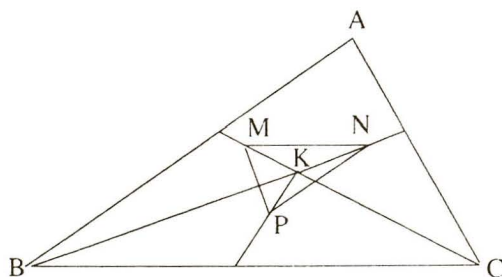
52*. AD חוצה את הזווית A ב- $\triangle ABC$,

$$AB = 12 \text{ ס"מ}, AC = 8 \text{ ס"מ}.$$

הנקודה E מחוץ ל- $\triangle ABC$,

$$\text{כך ש: } AE = DC, CE = \frac{2}{3}AD.$$

הוכח: $CE \parallel AD$



53**. K נקודה בתוך המשולש ABC.

M, N ו- P הם מרכזי הכובד

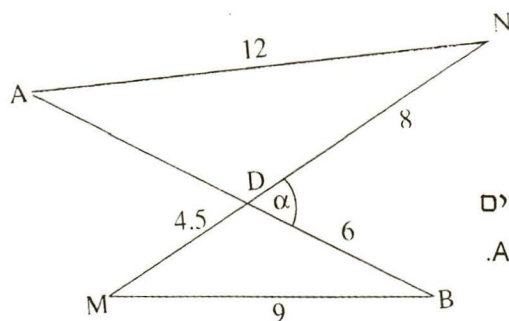
(נקודת מפגש התיכונים) של

המשולשים KAC, KAB ו- KBC,

בהתאמה.

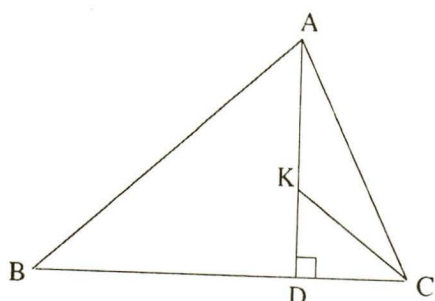
הוכח: $\triangle MNP \sim \triangle ABC$

סעיף 2.4



54. הישרים AB ו- MN נחתכים ב- D,

α זוית חדה. העזר בנתונים
שבשרטוט כדי להוכיח שהמשולשים
MDB ו- ADN דומים, וחשב את AD.

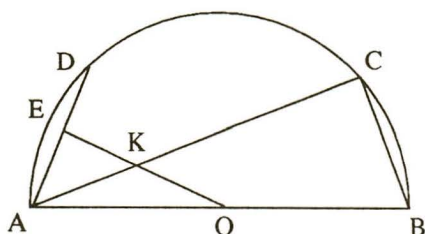


55. הגובה AD ב- $\triangle ABC$, מחלק את

הצלע BC כך ש: $BD = 3DC$.

נתון: 4 ס"מ KC , 12 ס"מ AB .

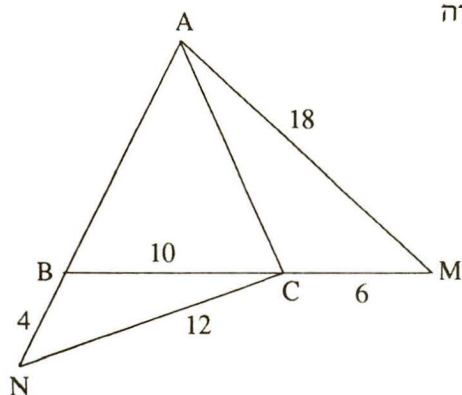
הוכח: $AK = 2KD$



56. AB קוטר של מעגל O.

נתון: $AD = BC$, E אמצע AD.

הוכח: $AC = 2OE$



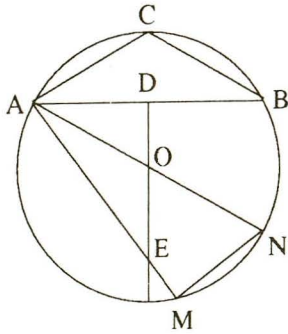
57. ABC משולש שוו"ש ($AB = AC$). M נקודה

על המשך BC ו- N על המשך AB.

התיחס לנתונים שבשרטוט.

א. הוכח $\angle N = \angle M$

ב. חשב את AB.



58*. במעגל O, שמחוגו 5 ס"מ, רשום מיתר

AB, שרוחקו מהמרכז 3 ס"מ $OD =$.

C נקודה על הקשת AB, $AC = 6$ ס"מ

המיתר AM נחתך ע"י המשך DO,

כך ש: $AE = \frac{2}{3}$ ס"מ.

הוכח: $MN = BC$ (AN קוטר)



59*. מנקודה A יוצאים שלושה משופעים

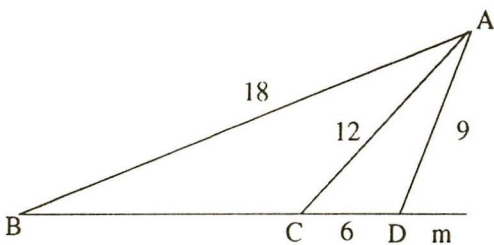
משופעים החותכים את הישר m

בנקודות B, C ו-D.

התיחס לנתונים שבשרטוט.

א. הוכח: $\triangle CAD \sim \triangle ABD$

ב. חשב את אורך הקטע BC.



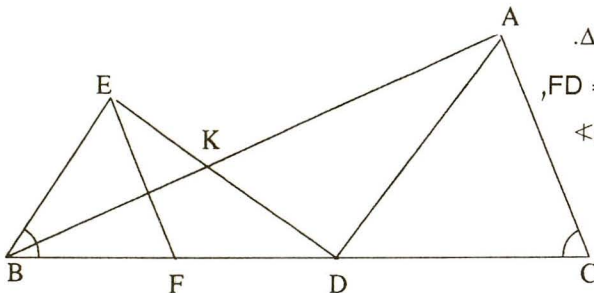
60*. AD חוצה זווית B ב- $\triangle ABC$,

ו- EF חוצה זווית B ב- $\triangle BED$.

נתון: $BF = 3$ ס"מ, $FD = 5$ ס"מ,

$\angle EBD = \angle C$, $DC = 4.8$ ס"מ

הוכח: $\triangle BKD$ ש"ש.



סעיף 3

61. הוכח: במשולשים דומים, היחס בין קטעים אמצעיים מתאימים -

כיחס הדמיון (סעיף 3.5)

62. הוכח: היחס בין חוצי זווית מתאימות, במשולשים דומים כיחס

הדמיון (סעיף 3.3)

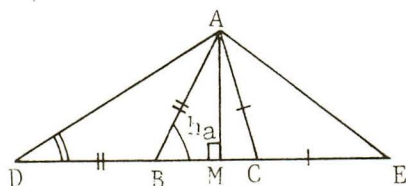
63. הוכח: במשולשים דומים, היחס בין אנכים אמצעיים מתאימים -

כיחס הדמיון (סעיף 3.4)

64. היחס בין רדיוסים של מעגלים, החוסמים משולשים דומים, כיחס הדמיון (סעיף 3.6).

65. הוכח: הרדיוסים של המעגלים, החסומים במשולשים דומים

מתיחסים כיחס הדמיון (סעיף 3.7).



66* הוכח (לא בדרך אלגברית):

היקפים של משולשים דומים

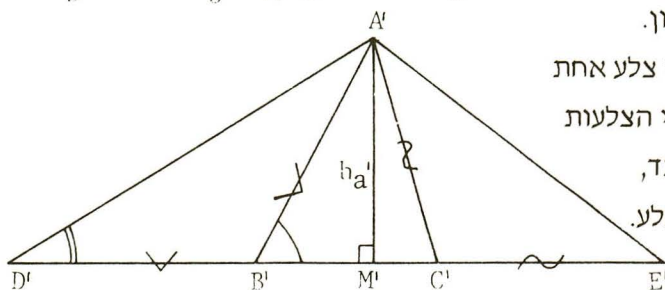
מתיחסים כיחס הדמיון.

ב"ע: העתק על המשכי צלע אחת

של כל משולש את שתי הצלעות

האחרות - אחת בכל צד,

ושרטט גובה לאותה צלע.

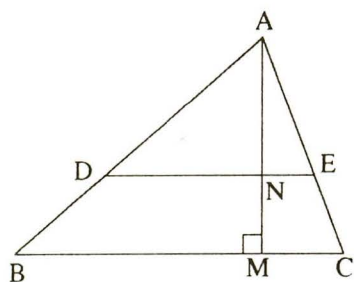


67. במשולש ABC נתון: $DE \parallel BC$,

$BC = 6$ ס"מ, $DE = 8$ ס"מ,

$AM = 7$ ס"מ ($BC \perp AM$).

חשב את MN.



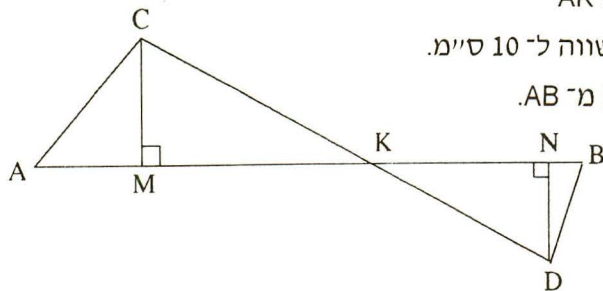
68. הקטעים AB ו-CD נחתכים

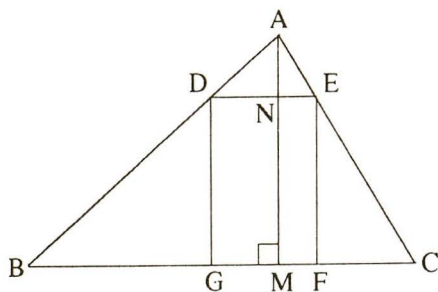
באופו כזה ש:

$AK : KB = CK : KD = 2.5$

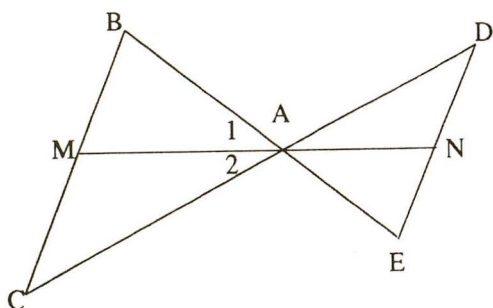
הרוחק של C מ-AB שווה ל-10 ס"מ.

חשב את הרוחק של D מ-AB.

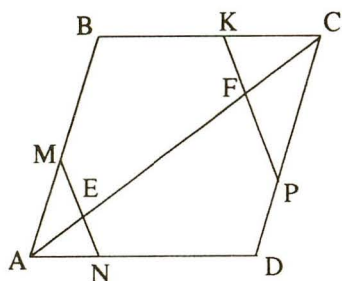




69. במשולש ABC חסום מלבן DEFG שהיקפו 22 ס"מ (ראה שרטוט).
אורך הצלע BC - 8 ס"מ ואורך גובהה AM - 12 ס"מ.
חשב את שטח המלבן.



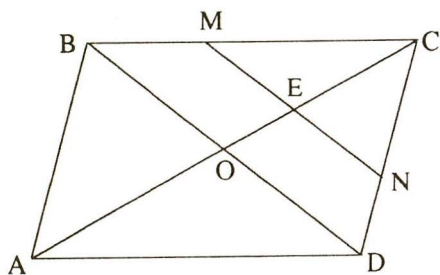
70. את צלעות המשולש ABC, המשיכו מעבר לקודקד A, כך ש:
 $AE = \frac{1}{2} AB$, $AD = \frac{1}{2} AC$
AM חוצה את הזווית BAC.
נתון: $MN = 15$ ס"מ
(N נקודת החיתוך של MA עם DE)
חשב את AN.



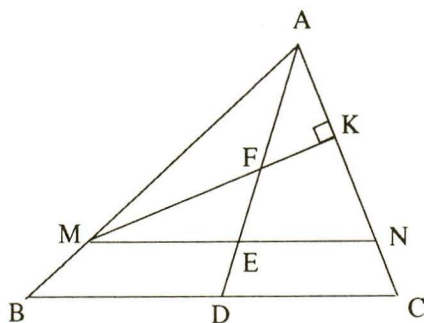
71. במעוין ABCD שרטטו שני קטעים מקבילים $MN \parallel KP$ החותכים את האלכסון AC בנקודות E ו-F.
נתון: $FC = 9$ ס"מ, $MN:KP = 1:3$,
 $AE:EF = 1:4$. חשב את KP.



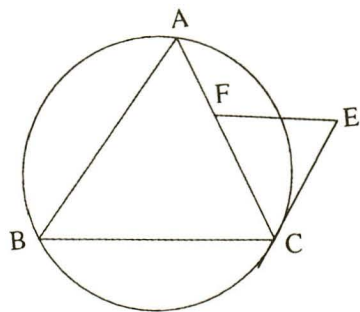
- 72*. במשולש שווש ABC ($AB = AC$) גדולה השוק פי 1.5 מהבסיס. נתון:
 $BD = BC$ (BD על AC). חוצה הזווית CE (CE על AB) חותך את BD בנקודה F.
חשב את אורך חוצה הזווית CE, אם נתון $EF = 2$ ס"מ.



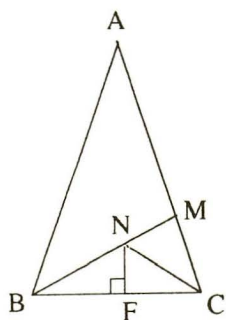
73. במקבילית ABCD נתון:
 $BD = 7.5$ ס"מ, $AC = 10$ ס"מ,
 $EN = 3$ ס"מ, $MN \parallel BD$.
חשב את EO.



74. $\triangle ABC$ שוו"ש ($AB = BC$). AD תיכון לשוק. מנקודה M שעל AB משרטטת שני קטעים: $MN \parallel BC$ ו- $MK \perp AC$. נתון: $MN = 4.5$ ס"מ, $AB = 6$ ס"מ, $ED = 1$ ס"מ. חשב את AF .

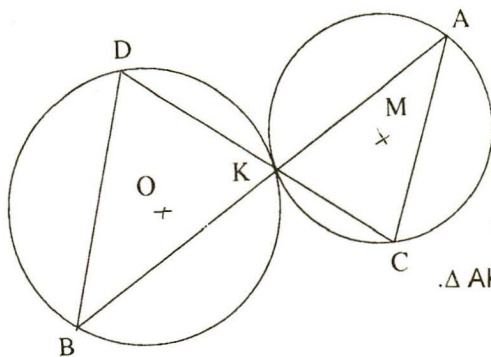


75. במעגל שמחוגו 8 ס"מ חסום $\triangle ABC$. CE משיק למעגל. נתון: $FE \parallel BC$, $FC = 7.5$ ס"מ, $BC = 12$ ס"מ. חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CFE .

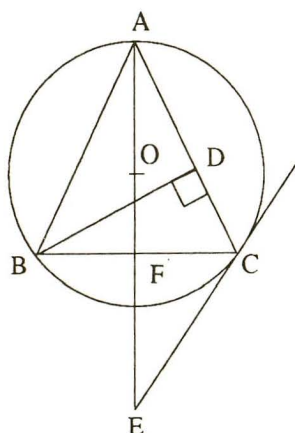


76. במשולש שוו"ש ABC ($AB = AC$), גדולה השוק פי $\frac{4}{3}$ מהבסיס, $NF \perp BC$ ו- BM ו- CN חוצי זוויות, ונתון: $\angle A = 36^\circ$, $NF = 8$ ס"מ. חשב את רדיוס המעגל החסום במשולש BCM .

77. אורכי צלעות המשולש ABC הם: $AB = 10.8$ ס"מ, $BC = 12$ ס"מ, $AC = 7.2$ ס"מ. נתון: $MN \parallel AB$ (M על BC , N על AC), $MB = 4$ ס"מ. חשב את היקף המשולש MNC .



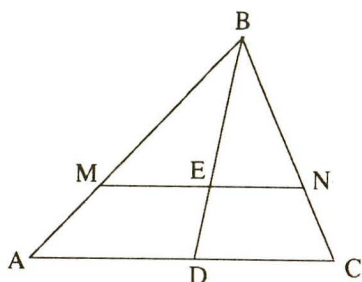
78. המעגלים O ו- M משיקים ב- K . רדיוס המעגל M שווה ל- 2 ס"מ, ורדיוס המעגל O - 3 ס"מ. דרך K עוברים הישרים AB ו- CD . חשב פי כמה גדול היקף $\triangle DKB$ מהיקף $\triangle AKC$.



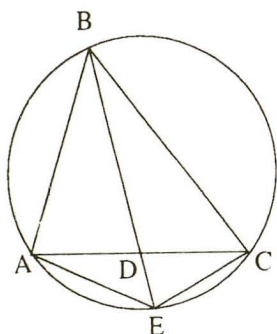
79. משולש שווש ABC ($AB=AC$) חסום במעגל O, $BD \perp AC$ המשיק למעגל בנקודה C חותך את המשך הקוטר היוצא מ-A ב-E.
א. הוכח: $\triangle CEF \sim \triangle ABD$
ב. אם $AD=BC$, חשב את היחס בין היקפי $\triangle ABD$ ו- $\triangle CEF$.

80. הקטעים AB ו- CD נחתכים בנקודה K, כך ש: $BK=3AK$ ו- $DK=3CK$. שטח המשולש BKD - 81 סמ"ר. חשב את שטח המשולש AKC.

81. במשולש ABC נתון: $KT \parallel BC$ (K על AB, T על AC), $AK = 10$ ס"מ, $KB = 2$ ס"מ, שטח הטרפז KTCB - 33 סמ"ר. חשב את שטח המשולש AKT.



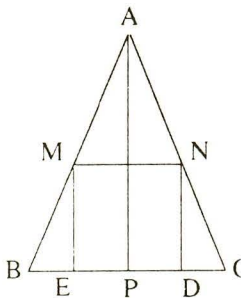
82. במשולש ABC נתון: $MN \parallel AC$, $AD=DC=7$ ס"מ, $MN=8$ ס"מ, $S_{ABC}=196$ סמ"ר.
חשב: א. את שטח המשולש MBE
ב. את היחס בין שטח המשולש BEN לשטח הטרפז MEDA.



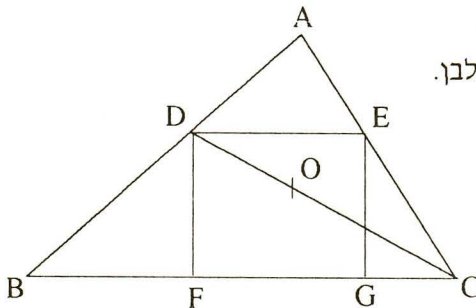
83. המשולש ABC חסום במעגל. התיכון BD חותך את המעגל שנית ב-E. נתון (בס"מ): $AC=8$, $AE=5$, $DE=3$.
א. חשב את היקפי המשולשים ADE ו- BDC.
ב. חשב את שטחי המשולשים הנ"ל.

ב. חשב את היקף ΔTDE

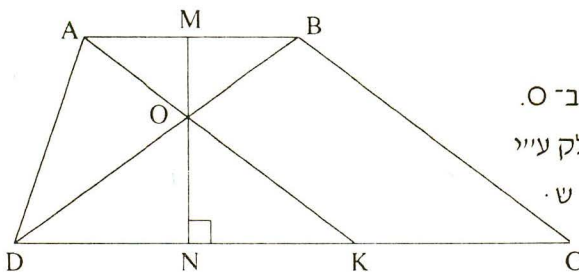
ו-AB, בהתאמה. הוכח: $STDE : SKBC = 3 : 4$



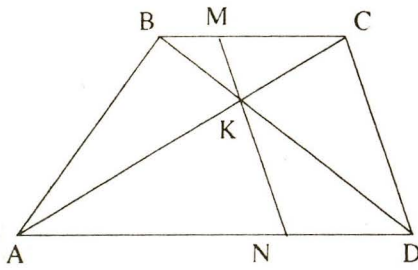
חשב את צלעות המלבן.



הראה, כי DEGF ריבוע.



ABCD משטח המשוולע AOB.



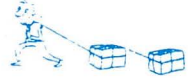
89*. הטרפז ABCD חוסם מעגל.

MN עובר דרך נקודת מפגש

האלכסונים ומקביל ל-CD.

נתון: $KN = 3MK$, $BC = 7$ ס"מ,

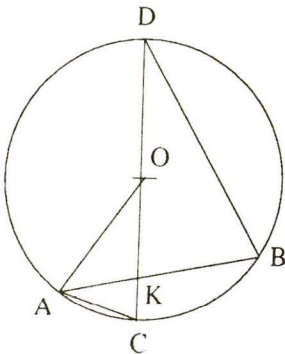
8 ס"מ $MN =$. חשב את AD ואת AB.



90**. התייחס לנתונים שבתרגיל הקודם (ללא התייחסות לערכים המספריים),

סמן את היקף המשולש AKD ב-P, והוכח כי היחס בין סכום שוקי הטרפז

לסכום של הבסיסים והאלכסונים יחד שווה ל-AD/P.



91*. רדיוס המעגל O - 9 ס"מ.

הנקודה C מחלקת את הקשת AB

ביחס של 2:1 ($AC:CB=$). CD קוטר.

א. הוכח כי המשולש KDB שווש

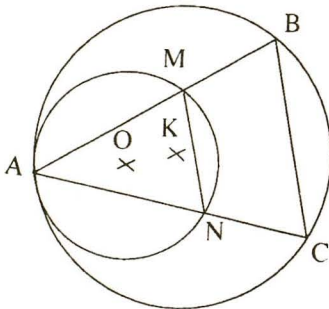
ב. חשב את אורך הקטע CK, אם

$AK=6$ ס"מ.



92*. התייחס לנתונים שבתרגיל הקודם, וחשב את היקפי המשולשים AKC

ו-DKB.



93*. המעגלים K ו-O משוקים בנקודה A.

המיתרים AB ו-AC שבמעגל

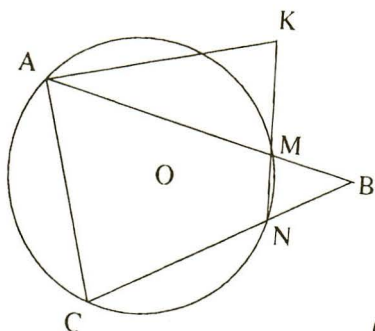
K חותכים את המעגל O בנקודות M

ו-N, בהתאמה. M - אמצע AB.

הוכח: שטח המרובע MBCN גדול פי 3

משטח המשולש AMN.



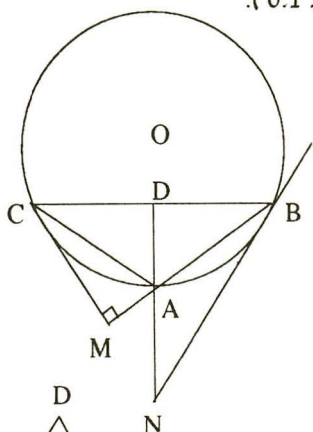


94. הצלע AC של $\triangle ABC$ היא מיתר במעגל O (החותך את שתי הצלעות האחרות ב-M וב-N). המקביל ל-BC דרך A, חותך את המשך NM ב-K.
א. הוכח: $\triangle AKM \sim \triangle ABC$
ב. חשב את היקף המשולש ABC, אם: $MB=3, AM=2, AM=4, AK=5$ (ס"מ)

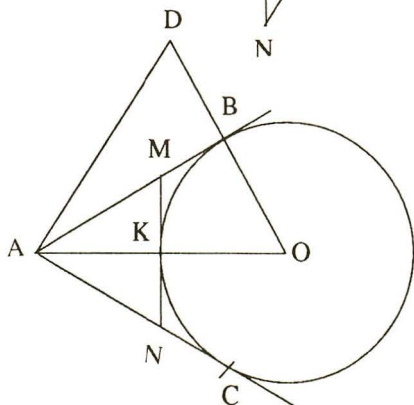


95** התיחס לנתונים של התרגיל הקודם, וחשב פי כמה גדול שטח המרובע

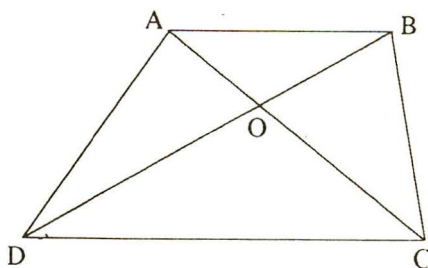
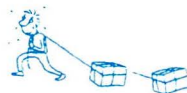
AMNC משטח המשולש AKM (בדיוק של 0.1).



- 96* $\triangle ABC$ (AB=AC) חסום במעגל O. CM גובה לשוק AB. N נקודת המפגש של חוצה הזווית A - AD, עם המשיק למעגל בנקודה B.
הוכח: $\triangle ACM \sim \triangle BND$

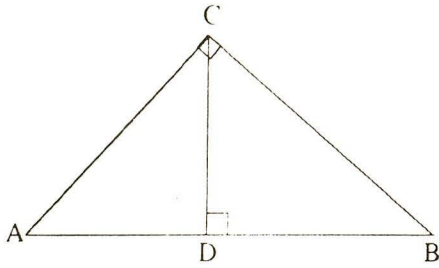


- 97** AB ו-AC משיקים למעגל O. AO חותך את המעגל ב-K. MN משיק למעגל ב-K. ממשיכים את OB כאורכו $BD=OB$. נסמן ב-P את היקף $\triangle AMN$ וב- P_1 את היקף $\triangle ADO$.
הוכח: א. $\triangle AMN \sim \triangle ADO$
ב. $P^2 = 2P_1 \cdot AK$



- 98** בטרפז ABCD נתון: שטח המשולש AOB שווה ל- m^2 ושטח המשולש DOC - n^2 . הוכח כי שטח הטרפז שווה ל- $(n+m)^2$

סעיף 4.



99. במשולש ישר-זווית ABC

$(\angle C = 90^\circ)$, $AC = 9$ ס"מ,

$BC = 12$ ס"מ. חשב את

אורך הקטע AD.

100. במשולש ישר זווית ABC $(\angle C = 90^\circ)$: $CD \perp AB$, $AD = 8$ ס"מ, $BD = 18$ ס"מ.

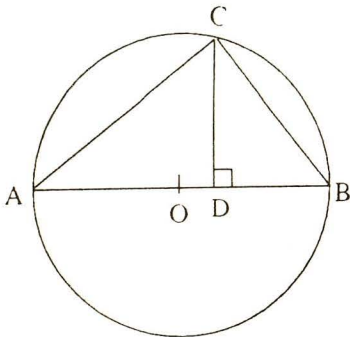
חשב את הקטע CD ואת שטח המשולש.

101. ABC משולש ישר-זווית $(\angle C = 90^\circ)$. נתון $CD \perp AB$ $CD = 4.8$ ס"מ,

$AB = 10$ ס"מ, חשב את AD ואת BC.

102. בדלתון ABCD שתי זוויות ישרות B ו- D. אלכסוניהם נחתכים בנקודה O.

מצא קשר בין אלכסוניהם דלתון זה.



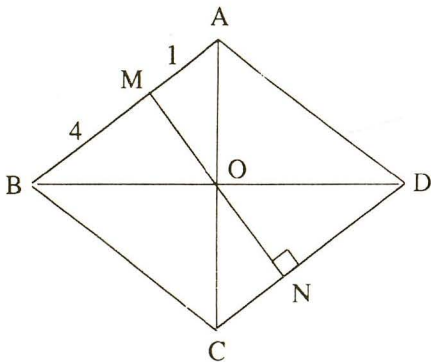
103. AB קוטר במעגל O. מנקודה C

שעל הקשת AB, מורידים אנך

ל- AB. נתון: $BC = 2\sqrt{13}$ ס"מ,

$AD = 9$ ס"מ.

חשב את רדיוס המעגל.



104. ABCD מעוין. הגובה MN, העובר

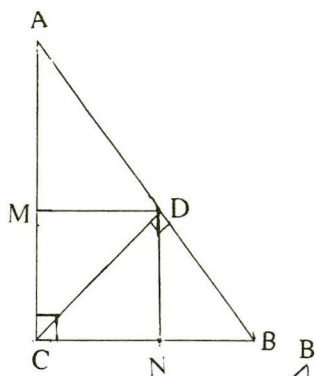
דרך נקודת מפגש האלכסונים מחלק

את הצלע AB לשני קטעים

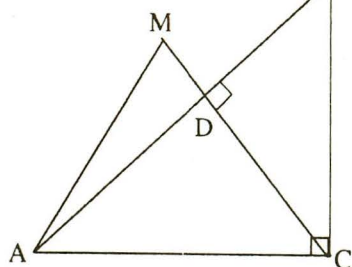
שארכייהם 1 ס"מ ו- 4 ס"מ.

חשב את רדיוס המעגל, החסום

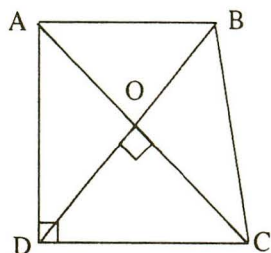
במעוין ואת שטח המעוין.



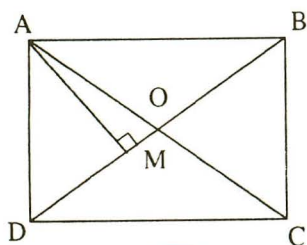
105. CD גובה ליתר במשולש ישר-זווית ABC.
 DN ו-DM מקבילים ל-BC ול-AC בהתאמה.
 נתון: $AM = 12$ ס"מ, $DN = 3$ ס"מ.
 חשב: א. את שטח המרובע MDNC.
 ב. את שטח המשולש ABC.



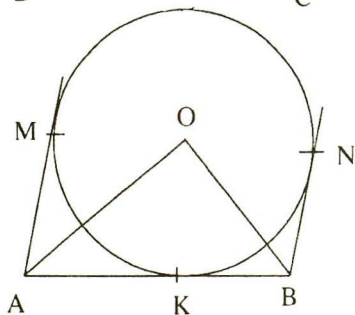
106. משולש ישר-זווית ABC ; C .
 $CD \perp AB$, $CD = 2DM$ (קו ישר).
 נתון: $AC = 5$ ס"מ, $AB = 6.25$ ס"מ.
 חשב את שטח המשולש ADM.



107. ABCD טרפז ישר-זווית, שאלכסונו מאונכים.
 נתון: $AD = 6$ ס"מ, $AO = 4$ ס"מ.
 חשב את אלכסונו הטרפז.

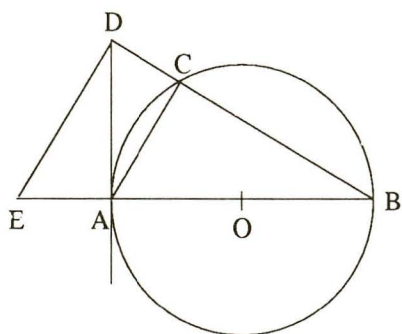


108. במלבן ABCD נתון: $AM \perp DB$,
 $OC = 6.5$ ס"מ, $DM = 4$ ס"מ.
 חשב את שטח המלבן.



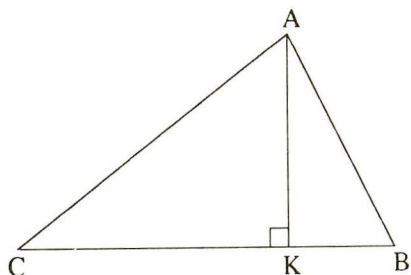
- 109*. AB , AM ו- BN משיקים למעגל O שמחוגו 4 ס"מ.
 נתון: $AB = 10$ ס"מ, $AM \parallel BN$.
 חשב את AM ו- BN .





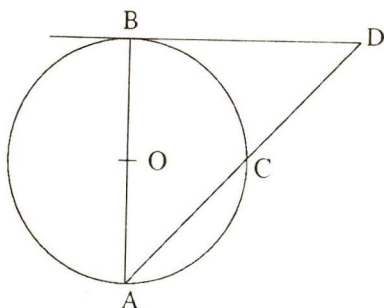
110. AB קוטר במעגל O. המשיק למעגל
בנקודה A חותך מיתר BC ב-D.
נתון: $ED \perp BD$, $DA = 24$ ס"מ,
 $EB = 50$ ס"מ.
חשב את AE ואת CD.

111. הוכח את המשפט שבסעיף 4.4.

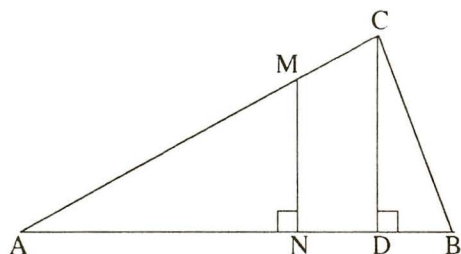


112. במשולש ABC נתון: $AK \perp BC$
(K על BC), $BC = 39$ ס"מ,
 $KB = 12$ ס"מ, $AK = 18$ ס"מ.
הוכח, כי BC עובר דרך מרכז
המעגל החוסם את המשולש ABC.

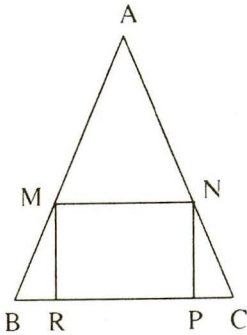
113. BD גובה לצלע AC במשולש ABC. נתון: $BD = 4\sqrt{3}$ ס"מ, $AD = 6$ ס"מ,
 $DC = 8$ ס"מ. הוכח, כי הצלע AC גדולה כפליים מתיכונה.



- 114*. רדיוס המעגל O - 5 ס"מ.
את המיתר AC, שאורכו 8 ס"מ,
האריכו בקטע CD, שאורכו 4.5 ס"מ.
הוכח, כי BD משיק למעגל.



- 115**. המשולש ABC ישר זווית ב-C.
הגובה CD שווה ל-12 ס"מ.
נתון: $AD = 8DB$.
מה צריך להיות אורכו של AN
ל-AB, כך שיחלק את שטח
המשולש ABC לשני שטחים שווים?



116** $\triangle ABC$ שווה, הבסיס BC שווה לגובהו,

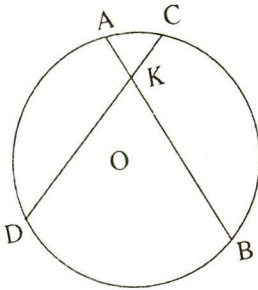
ואורכם 18 ס"מ כ"א. מלבן MNPR

חסום במשולש ABC (ראה שרטוט).

אלכסוני המלבן מאונכים לשוקי

המשולש. חשב את שטח המלבן.

סעיפים 5.1, 5.2



117. המיתרים AB ו-CD נחתכים ב-K.

חשב את הגודל המבוקש בכל סעיף,

ע"פ הנתונים (בס"מ):

א. $KD=?$, $CK=3$, $KB=6$, $AK=2$

ב. $KB=?$, $DK=5$, $CK=4$, $AB=12$

ג. $AB=?$, $DK=4$, $CK=3$, $KB=3KA$

ד. $X=?$, $KD=X-3$, $CK=5$, $KB=X$, $AK=4$

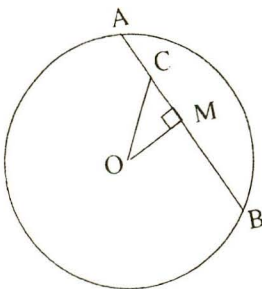
118. AB מיתר במעגל O. OM רוחקו ממרכז המעגל. דרך הנקודה M

עובר מיתר CD כך ש: $CM=13.5$ ס"מ, $MD=6$ ס"מ.

חשב את אורך המיתר AB.

119. המיתר AB חותך את הקוטר CD של מעגל O בנקודה M נתון: $AB=18$ ס"מ,

$OM=7$ ס"מ, $BM=6$ ס"מ. חשב את רדיוס המעגל.



120. הוכח את המסקנה שבסעיף 5.2

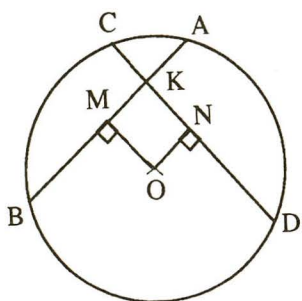
121. AB מיתר במעגל שמחוגו 7 ס"מ.

הנקודה C מונחת על AB.

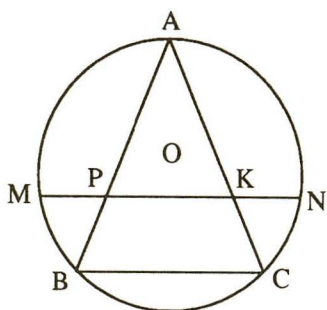
נתון: $BC=8$ ס"מ, $OC=3$ ס"מ.

חשב את רוחק AB ממרכז המעגל.

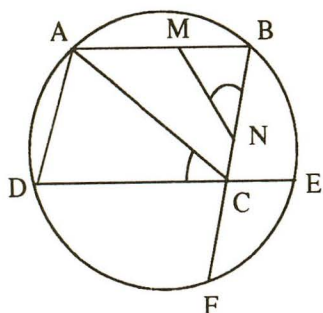
122. המיתרים AB ו-CD שבמעגל O נחתכים בנקודה K, ומאונכים זה לזה.
 $ON \perp CD$, $OM \perp AB$. נתון: $AK = 18$ ס"מ, $OM = 3$ ס"מ, $CD = 18$ ס"מ.
 חשב את ON ואת רדיוס המעגל.



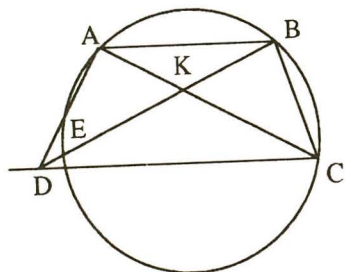
123. המיתרים AB ו-CD שבמעגל O נחתכים ב-K. נתון: $OM \perp AB$, $ON \perp CD$, $KM = 3$ ס"מ, $ON = 7$ ס"מ, $OM = 2\sqrt{19}$ ס"מ, $MB = 13$ ס"מ.
 חשב את KD.



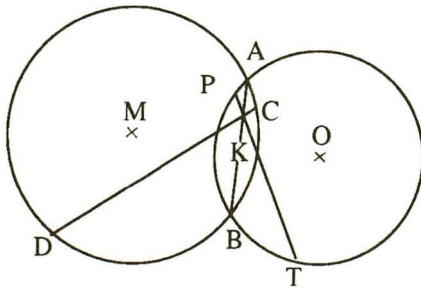
124. $\triangle ABC$ חסום במעגל O, $AB = AC$. $MN \parallel BC$ חותך את AB ב-P ואת AC ב-K. נתון: $AP:PB = 2:1$, $BC = 21$ ס"מ, $KN = 4$ ס"מ.
 חשב את אורך השוק.



- 125*. הקודקדים A, B ו- D של מקבילית ABCD מונחים על מעגל O.
 E ו-F נקודות החיתוך של המשכי DC ו-BC, בהתאמה עם המעגל.
 נתון: $BN = CF$, $BM = CE$.
 הוכח: $\angle MNB = \angle ACD$.



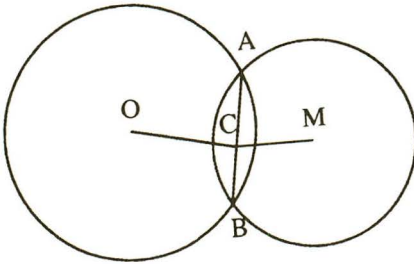
126. הקודקדים A, B ו- C של טרפז ABCD מונחים על מעגל O.
 האלכסון BD חותך את המעגל ב-E.
 הוכח, כי CK הוא ממוצע הנדסי של KE ו-KD.



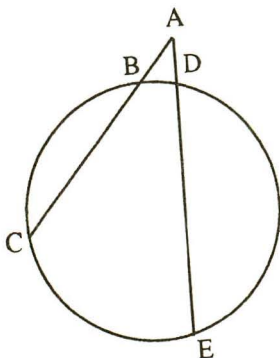
- 127*. שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B. דרך נקודה K שעל AB עוברים שני מיתרים: PT במעגל O ו-DC במעגל M. נתון: $DK = 9$ ס"מ, $KC = 4$ ס"מ, $PT = 15$ ס"מ. חשב את KT.

128. התייחס לנתונים של התרגיל הקודם, כאשר ידוע ש-K אמצע AB, ורדיוס המעגל M 10 ס"מ. חשב את רוחק הנקודה K ממרכז המעגל M.

129. שני מעגלים O ו-M נחתכים בנקודות A ו-B. דרך הנקודה C, שעל AB עובר ישר החותך את המעגל O בנקודות D ו-E ואת המעגל M בנקודות K ו-P (סדר הנקודות D, K, E, P). הוכח: $\frac{DC}{CP} = \frac{KC}{CE}$



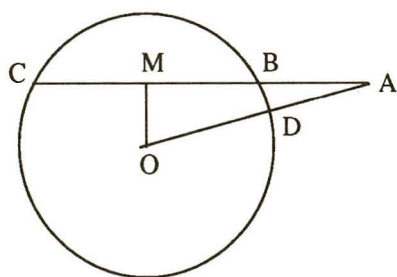
130. שני מעגלים O ו-M (שמחוגיהם R ו-r, בהתאמה) נחתכים בנקודות A ו-B. C נקודה על AB, שרוחקה מ-O שווה ל-a ורוחקה מ-M שווה ל-b. הוכח: $\frac{R+a}{r+b} = \frac{r-b}{R-a}$



סעיפים 5.3, 5.5

131. ABC ו-ADE חותכים במעגל O. חשב בכל סעיף את הגודל המבוקש ע"ש הנתונים (בס"מ):
א. $AE = ?$, $DE = 13$, $BC = 8$, $AB = 4$.
ב. $AC = ?$, $DE = 16$, $AD = 2$, $BC = 3AB$.
ג. $X = ?$, $DE = 7$, $BC = 17$, $AE = X + 2$, $AC = 2X$.

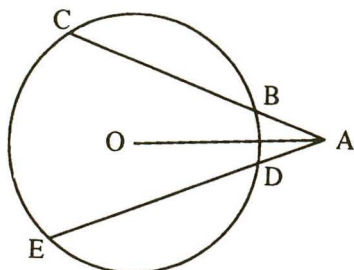
132. הוכח את המסקנה שבסעיף 5.5.



133. ABC חותך מעגל O, שמחוגו 19 ס"מ.

אורך האנך OM ל-BC $3\sqrt{33}$ ס"מ.

חשב את AB, אם $AO = 21$ ס"מ.



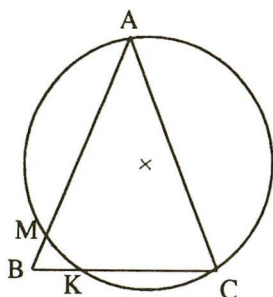
134. ABC ו- ADE שני חותכים למעגל O,

שהרדיוס שלו 16 ס"מ.

נתון: $AO = 20$ ס"מ,

$AB = 8$ ס"מ, $DE = 10$ ס"מ.

הראה כי $\triangle ACE$ שווים.



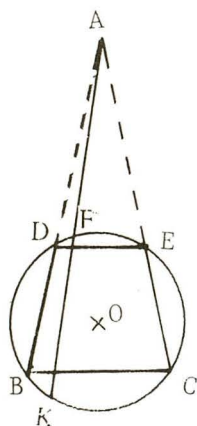
135. $\triangle ABC$ שווים ($AB = AC = 15$ ס"מ).

מעגל שעובר דרך קצות השוק AC,

חותך את AB ב-M, ואת BC ב-K.

נתון: $BK = 5$ ס"מ, והגובה לבסיס

12 ס"מ. חשב את MB ו-AM.



136. BDEC טרפז חוסם מעגל וחוסם

במעגל. A נקודת מפגש המשכי

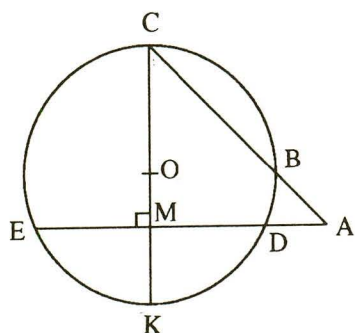
השוקיים. הישר AK חותך את

המעגל בנקודות F ו-K.

נתון: $AF = 2$ ס"מ, $FK = 16$ ס"מ,

$DE = 4$ ס"מ, $BC = 6$ ס"מ.

חשב את AD.

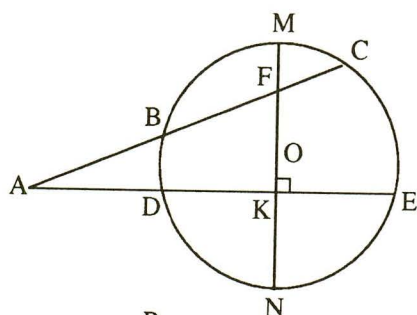


רוחקו מהמרכז 6ס"מ = CK.OM קוטר.

הנקודה A מונחת על המשך המיתר

ED, כך ש: $4 \text{ ס"מ} = AD$.

חשב את BC.



*138. ABC ו- ADE חותכים למעגל O

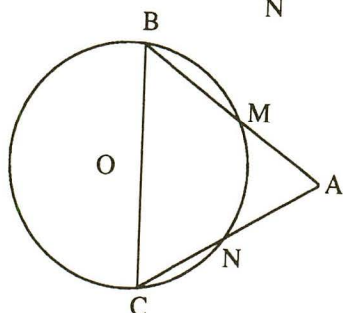
שמחוגו 13 ס"מ. הקוטר MN

חותך את AC בנקודה F ומאונך

ל- AE ב- K. נתון: $AD = 4$ ס"מ

$MF = 6 \text{ ט"מ} , KN = 8 \text{ ט"מ}$

חשב את BF (בדיוק של 0.1).



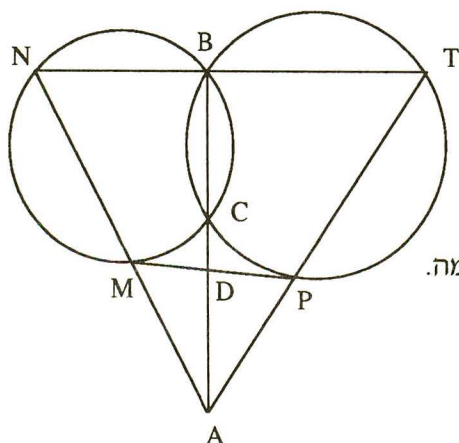
*139. במעגל O שלושה מיתרים:

NC= 4 ס"מ, MB = 7 ס"מ

14 ס"מ $BC = A$ נקודת מפגש

המשכי BM ו-CN ; 5 ס"מ = AM.

הוכח, כי M אמצע הקשת BMN .



140*. שני מעגלים נחתכים בנקודות

B ו-C. NT עובר דרך B. A נקודה

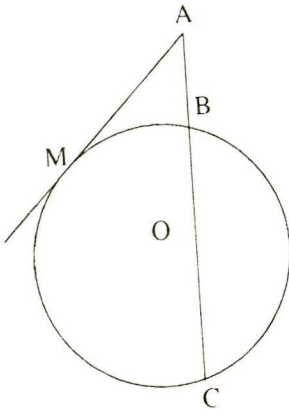
על המשך BC, AN ו-AT חותכים

את המעגלים בנקודות M ו- P, בהתאמה.

נתון: $NT = 3MP$, $4 \text{ ס"מ} = AM$.

חשב את AT.

סעיף 5.4



141. מנקודה A יוצאים משיק AM וחיתך

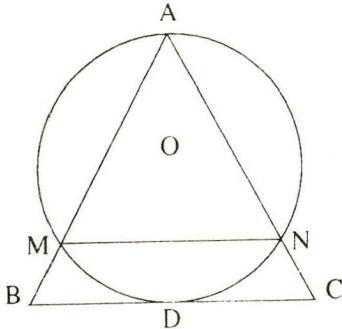
ABC למעגל O. חשב בכל סעיף את

הגודל המבוקש, ע"ס הנתון (בס"מ):

א. $AM=?$, $BC=5$, $AB=4$

ב. $BC=?$, $AC=16$, $AM=8$

ג. $AC=?$, $AM=10$, $BC=3AB$



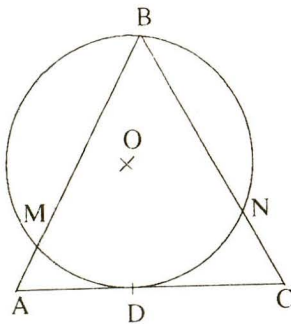
142. המעגל O עובר דרך הקודקד A של

משולש שוו"צ ABC ומשיק לצלע BC

בנקודה D. $BD = DC = 8$ ס"מ.

א. הוכח: $MN \parallel BC$

ב. חשב את אורך MN



143. ABC משולש שוו"צ. המעגל O עובר

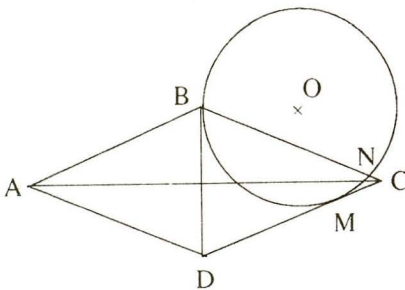
דרך הקודקד B ומשיק ל-AC ב-D.

המעגל חותך את AB ב-M ואת BC

ב-N.

נתון: $BN = 5$ ס"מ, $CD = 4$ ס"מ.

חשב את צלע המשולש ואת AM.



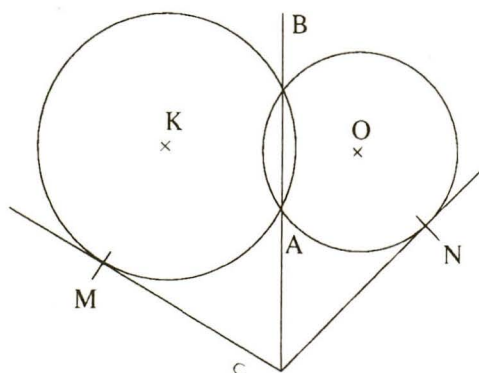
144. ABCD מעוין. המעגל O משיק לצלע

CD בנקודה M, ולאכסון BD

בנקודה B.

נתון: $CM = 8$ ס"מ, $DB = 12$ ס"מ.

חשב את CN ואת AC.



145. המעגלים K ו-O נחתכים

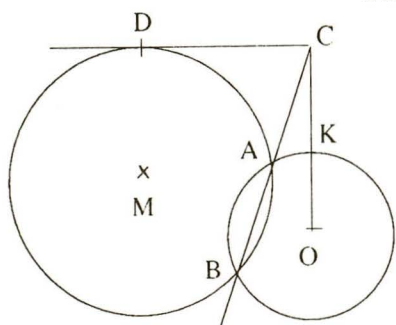
בנקודות A ו-B. C על המשך BA.

CM ו-CN משיקים למעגלים K

ו-O, בהתאמה.

הוכח: $CM = CN$.

146. שני מעגלים O ו-M נחתכים בנקודות A ו-B. רדיוס המעגל O 6.5 ס"מ. רוחקו של המיתר AB מהמרכז O 6 ס"מ. C נקודה על המשך AB אורך המשיק CK למעגל M $\sqrt{14}$ ס"מ. חשב את AC.



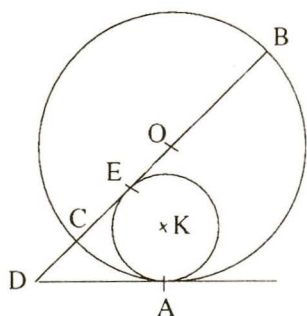
147. שני מעגלים O ו-M נחתכים בנקודות

A ו-B. רדיוס המעגל O 5 ס"מ.

C נמצאת על המשך BA, ורוחקה

ממרכז המעגל O 13 ס"מ.

חשב את אורך המשיק CD למעגל M.



148. שני מעגלים K ו-O משיקים

מבפנים בנקודה A. הקוטר AB

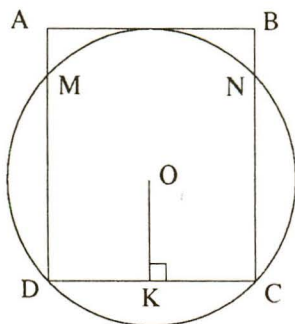
משיק למעגל K ב-E ואת המשיק

המשותף של שני המעגלים ב-D.

א. הוכח: OKA קו ישר.

ב*. אם $AD = 9$ ס"מ, $DC = 3$ ס"מ,

חשב את מחוגי שני המעגלים.



149*. המעגל O משיק לצלע AB של מלבן

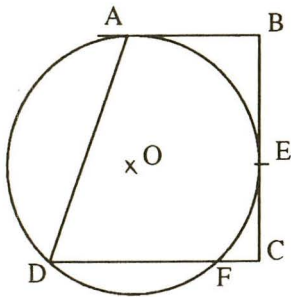
ABCD ועובר דרך הקודקדים C

ו-D. AB חותך את המעגל ב-M,

ו-BC חותך אותו ב-N. רדיוס

המעגל 10 ס"מ, $OK \perp CD$, $OK = 8$ ס"מ.

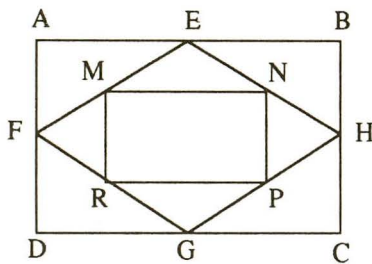
חשב את MA.



150**. ABCD טרפז ישר-זווית ($AB \parallel CD$).

מעגל O עובר דרך קצות השוק הארוכה AD, משיק לבסיס AB ב-A, ולשוק BC ב-E. הבסיס הגדול נחתך ע"י המעגל לשני קטעים: $FC = 4$ ס"מ, $DF = 32$ ס"מ. חשב את שוקי הטרפז.

סעיף 7

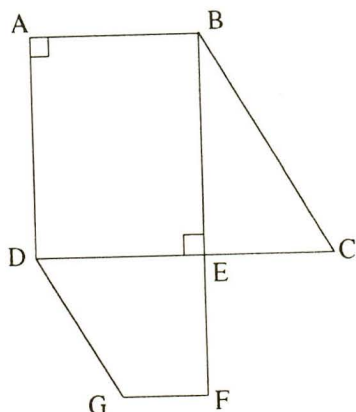


151. במלבן ABCD חיברו אמצעי צלעותיו ונוצר מרובע EFGH, אח"כ חיברו את אמצעי הצלעות של המרובע הני"ל M, N, P, R. הוכח כי מלבן MNPR ומצא את היחס בין שטח המלבן MNPR לשטח המלבן ABCD.

152. במעוין MNPR, חיברו אמצעי הצלעות וקיבלו מרובע ABCD. כמו כן חיברו אמצעי צלעות המרובע ABCD וקיבלו מרובע EFGH. הוכח, כי מעוין EFGH, ומצא את היחס בין היקפי המעוין הפנימי והחיצוני.

153. הוכח: אם שני מצולעים משוכללים בעלי אותו מספר צלעות, חסומים במעגלים, אז מחוגי המעגלים, מתיחסים זה לזה כיחס הדמיון.

154. הוכח: במצולעים משוכללים, בעלי אותו מספר צלעות, היחס בין מחוגי המעגלים, החסומים במצולעים שווה ליחס בין מחוגי המעגלים החסומים אותם.



15. ABCD טרפז ישר-זווית שבו:

3 ס"מ $AB =$, 5 ס"מ $BC =$, 4 ס"מ $BE =$.

את גובה הטרפז האריכו בקטע

EF, השווה ל-2 ס"מ.

דרך הנקודה D בנו מקביל ל-BC

ודרך F מקביל ל-ED.

הוכח: א. הטרפז EFGD דומה ל-ABCD

ב. חשב את היקף הטרפז EFGD

ואת שטחו.

תשובות



- 19 (6), 20 (20), 8 (21), 27 (25), 4.14 (23), 5.4 (43), 8 (37), $(m^2 - n^2)/2n$ (34), $a^2/(a+b)$, ב. $5\sqrt{2}$ (32), 2.6 (54), 6 (57), 15 (59), 7.5 (67), 4 (68), 18 (69), 5 (70), 12 (71), 6 (72), 1 (73), 2 (74), 5 (75), 6 (76), 20 (77), 78 (78), פי 1.5 (79), 2:1 (80), 9 (81), 75 (82), א. 32, ב. 16:33, א. 83, 12, 16, ב. 6, $10\sqrt{3}$, 18 (84), 86 (MN = ME = 7.2), א. 6, פי 12, 89 (20, 21), 4 (91), 156, 12 (100), 5.4 (99), 1.4 (95), פי 1.4, 104 (20, 2), 6.5 (103), 8, 3.6, 6, 4, 101 (106), 3 (107), $3.6\sqrt{5}$, 78 (108), 9 (115), 18, 14.4, 32, 19.2, 117 (118), 15, ד. 8, ג. 2, ב. 10 או 2, א. 4, 11 (119), 1.5 (121), 122 (9, $9\sqrt{2}$), 20 (123), 18 (124), 3 (127), 12 או 3, 128 (131), א. 16, ב. 12, ג. 10, 4 (133), 9, 6 (135), 140 (12), 136 (4), 16 (137), 15.9 (138), 12 (140), 141 (א. 6, ב. 12, ג. 20), 12 (142), ב. 12, ג. 4.5, 12 (148), 2 (146), 38.2, 3.2 (144), 2 (149), $32, 16\sqrt{5}$ (150), 1:4 (151), 1:2 (152), 4.5 (155)

משפטים, נוסחאות ומסקנות חשובות בהנדסת המישור

- *** מספר האלכסונים היוצאים מקודקד אחד של מצולע בעל n צלעות הוא $(n - 3)$. מספר האלכסונים הכולל של המצולע הוא $\frac{n(n - 3)}{2}$
- *** שני משולשים חופפים: כאשר הם שווים ב: I - שתי צלעות והזווית הכלואה ביניהן - צ.ז.צ. II - צלע ושתי הזוויות שלידה - ז.צ.ז. III - שלוש צלעות - צ.צ.צ. IV - שתי צלעות והזווית מול הצלע הגדולה. V - צלע, זווית שלידה וזווית שממולה.
- *** במשולש שו"ש, זוויות הבסיס שוות זו לזו. חוצה זווית הראש במשולש הוא גם תיכון לבסיס, גם גובה ולכן גם אנך אמצעי.
- *** אם במשולש אחד התיכונים (או אחד מחוצי הזוויות) הוא גם גובה, המשולש הוא משולש.
- *** במשולש שוו"צ כל חוצה זווית הוא גם תיכון, גובה ואנך אמצעי, וכל זוויותיו שוות זו לזו.
- *** האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את הבסיס המשותף ומאונך לו.
- *** זווית חיצונית למשולש גדולה מכל זווית פנימית שאינה צמודה לה.
- *** במשולש אחד או במשולשים חופפים: א. מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות, ולהיפך, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות. ב. מול הצלע הגדולה מונחת הזווית הגדולה, ולהיפך, מול הזווית הגדולה מונחת הצלע הגדולה.
- *** סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית, והפרשן קטן ממנה.
- *** במשולש ישר זווית: א. שתי הזוויות האחרות הן חדות. ב. היתר גדול מכל ניצב.

האנך האמצעי של קטע הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות, שרוקיהן מקצות הקטע שווים זה לזה. ***

חוצה-זווית הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות, שמרחקיהן משוקי הזווית שווים זה לזה. ***

אכסיומת המקבילים: ***
דרך נקודה שמחוץ לישר אפשר לבנות לישר מקביל אחד בלבד.

אם שתי זוויות מתאימות (או שתי זוויות מתחלפות) שוות זו לזו, או שתי זוויות חד צדדיות משלימות ל- 180° , אז הישרים מקבילים. ***

אם שני ישרים מקבילים נחתכים ע"י ישר שלישי, שוות הזוויות המתאימות, שוות המתחלפות, והחד צדדיות משלימות ל- 180° . ***

זווית חיצונית למשולש שווה לסכום הזוויות הפנימיות, שאינן צמודות לה. ***

סכום הזוויות במשולש 180° ; סכום הזוויות במצולע בעל n צלעות שווה: ***
 $180^\circ (n - 2)$. סכום הזוויות במצולע קמור - 360° .

במשולש ישר-זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר. במשולש ישר זווית, שבו זווית בת 30° שווה הניצב, שמול זווית זו, למחצית היתר. ***

במקבילית: ***
א. הזוויות הנגדיות שוות זו לזו, והסמוכות משלימות ל- 180° .
ב. הצלעות הנגדיות שוות זו לזו.
ג. האלכסונים חוצים זה את זה.

מרובע הוא מקבילית, אם מתקיים אחד התנאים הבאים: ***
א. כל שתי צלעות נגדיות מקבילות (הגדרה).
ב. כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.
ג. זוג צלעות נגדיות מקבילות ושוות.
ד. הזוויות הנגדיות שוות, או הזוויות הסמוכות משלימות ל- 180° ,
או זוג נגדיות שוות וזוג סמוכות משלימות ל- 180° .
ה. אלכסונים חוצים זה את זה.

למלבן שייכות כל תכונות המקבילית, ונוסף לזה: ***
א. כל זוויותיו ישרות, ב. אלכסוניו שווים זה לזה.

מרובע הוא מלבן, אם כל זוויותיו ישרות, או אם הוא מקבילית, ומתקיים אחד מהתנאים: ***

א. יש לו זווית ישרה (הגדרה)

ב. אלכסונו שווים זה לזה.

למעיון ** שייכות כל תכונות המקבילית, ונוסף לזה :

א. כל הצלעות שוות

ב. אלכסונו מאונכים זה לזה וחוצים את הזוויות.

בריבוע ** מרובע הוא מעוין, אם כל צלעותיו שוות, או אם הוא מקבילית, שבה מתקיים

אחד התנאים :

א. שתי צלעות סמוכות שוות זו לזו (הגדרה)

ב. האלכסונים מאונכים זה לזה

ג. אלכסון חוצה את אחת מזוויותיה.

בריבוע ** מתקיימות כל תכונות המעוין והמלבן גם יחד

בטרפז שו"ש ** הזוויות המונחות על בסיס אחד שוות זו לזו ; אלכסונו שווים

זה לזה, והם חותכים זה את זה באופן כזה, שהקטעים הקרובים לכל בסיס שווים זה לזה.

בטרפז ** אם בטרפז מתקיים אחד מהתנאים הבאים, הטרפז הוא שו"ש :

א. הזוויות על יד בסיס אחד שוות זו לזו

ב. האלכסונים שווים זה לזה

קטע האמצעים במשולש ** מקביל לצלע השלישית ושווה לחצייה ;

ולחיפך, קטע היוצא מאמצע צלע אחת של משולש, ומקביל לצלע השנייה, חוצה את הצלע השלישית.

קטע האמצעים בטרפז ** מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם ;

ולחיפך, קטע היוצא מאמצע שוק אחת של טרפז, ומקביל לבסיסים, חוצה גם את השוק השנייה.

נקודות מיוחדות במשולש

שלושת האנכים האמצעיים במשולש נפגשים בנקודה אחת, שהיא מרכז **

המעגל החוסם את המשולש.

שלושת חוצי הזוויות במשולש נפגשים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל **

החסום במשולש.

התיכונים במשולש מחלקים זה את זה ביחס של 2 : 1, כזושר החלק הגדול **

קרוב לקודקד ; שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת, שהיא מרכז הכובד של המשולש.

שלושת הגבהים במשולש נפגשים בנקודה אחת.

המעגל

דרך שלוש נקודות, שאינן מונחות על ישר אחד, עובר מעגל אחד ויחיד.

מיתרים

אם ישר, העובר דרך מרכז המעגל מאונך למיתר, אז הוא חוצה את הזווית המרכזית הנשענת על המיתר, וכן חוצה את הקשת השייכת למיתר.

אם שני מיתרים במעגל, (או במעגלים שווים) שווים זה לזה, הרי הם נמצאים ברוחקים שווים ממרכז המעגל; ולהיפך, אם לשני מיתרים - רוחקים שווים ממרכז המעגל, המיתרים שווים זה לזה.

אם שני מיתרים במעגל או במעגלים שווים, הם שונים, אז למיתר הגדול - רוחק קטן יותר מהמרכז; ולהיפך, אם מיתר קרוב יותר למרכז, הרי המיתר גדול יותר.

אם שני מיתרים מקבילים, הקשתות שהם כולאים שוות זו לזו; ולהיפך, אם שני מיתרים כולאים ביניהם קשתות שוות, אזי המיתרים מקבילים.

משיק

משיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה; ולהיפך, אם ישר מאונך לרדיוס בקצהו, הישר משיק למעגל.

אורכי משיקים, היוצאים מנקודה אחת למעגל, שווים זה לזה.

הקטע המחבר את מרכז המעגל, לנקודה שממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית בין המשיקים.

זוויות במעגל

מידת הזווית המרכזית שווה למידת הקשת, שעליה היא נשענת.

זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת, או לחצי הקשת שעליה היא נשענת.

זווית היקפית הנשענת על הקוטר היא זווית ישרה.

כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על אותה קשת, שוות זו לזו.

זווית פנימית במעגל שווה למחצית סכום הקשתות שבין שוקיה.

*** זווית חיצונית למעגל שווה למחצית הפרש הקשתות שבין שוקיה.

*** זווית בין משיק ומיתר, שקצהו בנקודת ההשקה, שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה (או למחצית הקשת הכלואה בין המשיק והמיתר).

*** זווית ראייה של מעגל, או זווית בין שני משיקים, שווה למחצית הפרש הקשתות שבין נקודות ההשקה.

מצולעים ומעגל

*** במרובע חסום במעגל (מרובע מיתרים) - סכום שתי זוויות נגדיות שווה ל- 180° ; ולהיפך, אם במרובע שווה סכום שתי זוויות נגדיות ל- 180° הרי המרובע הוא בר-חסימה.

*** במרובע חוסם מעגל (מרובע משיקים) - סכום שתי צלעות נגדיות, שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות; ולהיפך, במרובע, שבו סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות, ניתן לחסום מעגל.

*** כל מצולע משוכלל ניתן לחסום במעגל, וניתן לחסום בו מעגל.

מצב יחסי של מעגלים

*** נקודת ההשקה של שני מעגלים משיקים נמצאת על קטע המרכזים שלהם, או על המשכו; ולהיפך, אם נקודה משותפת של שני מעגלים נמצאת על קטע המרכזים שלהם (או על המשכו), המעגלים משיקים זה לזה.

שטחים

*** שטח מלבן $S=ab$

*** שטח מקבילית $S=a \cdot h_a$

*** שטח משולש $S=1/2 a \cdot h_a$

*** שטח משולש שווה צלעות

$$S = (a^2 \sqrt{3})/4$$

*** שטח משולש, בעל היקף P ורדיוס מעגל חסום בו r.

$$S = Pr/2 \quad (\text{כאשר } p=P/2)$$

*** נוסחת הירון לחישוב שטח משולש: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

כאשר p מחצית היקף המשולש

שטח מרובע, שאלכסונו מאונכים, שווה למחצית מכפלת האלכסונים. ***

שטח מצולע משוכלל שווה למחצית היקפו, מוכפל ברדיוס המעגל החסום בו. **

משפט פיתגורס

משפט אויכלידס: במשולש ישר-זווית, שווה שטח הריבוע הבנוי על ניצב, לשטח המלבן שצלעותיו הן: היתר והיטל הניצב על היתר. **

משפט פיתגורס: במשולש ישר-זווית, שווה שטח הריבוע הבנוי על היתר לסכום שטחי הריבועים הבנויים על הניצבים. **

הכללה למשפט פיתגורס

כאשר הזווית α חדה $a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot b \cdot \cos \alpha$ (bc - היטל צלע b על צלע c) **

כאשר הזווית β קהה $b^2 = a^2 + c^2 + 2c \cdot a \cdot \cos \beta$

היקף המעגל - L, בעל רדיוס R : $L = 2 \pi R$ **

שטח עיגול - S, בעל רדיוס R : $S = \pi R^2$ **

אורך קשת מעגל השייכת לזווית מרכזית α : $\pi R \alpha / 180$ **

שטח גזירת עיגול בעל זווית α : $\pi R^2 \alpha / 360$ **

פרופורציה

משפט תאלס: ישרים מקבילים, החותכים שוקי זווית, מקצים עליהם קטעים פרופורציוניים; ולהיפך: אם ישרים, החותכים שוקי זווית, מקצים עליהם קטעים פרופורציוניים, אז הישרים מקבילים. **

מסקנה ממשפט תאלס:

אם $DE \parallel BC$
אז $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית, לשני קטעים, שהיחס ביניהם כמו היחס בין הצלעות הסמוכות להם (ולהיפך). **

חוצה זווית חיצונית מחלק את הצלע שמול קודקד הזווית, חלוקה חיצונית, ביחס הצלעות הסמוכות (ולהיפך). **

דמיון

ישר, המקביל לצלע של משולש חותך ממנו משולש דומה לו.

משפטי דמיון:

- שני משולשים דומים, אם:
1. שתי צלעותיהם פרופורציוניות והזוויות הכלואות ביניהן, שוות זו לזו.
- שתי זוויות שלהם שוות.
- שלוש צלעותיהם פרופורציוניות.
- שתי צלעות פרופורציוניות והזוויות מול הצלע הגדולה, בכל אחד מהמשולשים, שוות זו לזו.

במשולשים דומים:

- היחס בין: א' גבהים מתאימים, ב' חוצי-זוויות מתאימים, ג' תיכונים מתאימים, ד' רדיוסים של מעגלים של מעגלים חוסמים, ה' רדיוסים של מעגלים חסומים, ו' היקפים הוא כיחס הדמיון.
- היחס בין השטחים כריבוע יחס הדמיון

פרופורציה במשולש ישר זווית

הגובה ליתר במשולש ישר-זווית, מחלק את המשולש לשני משולשים דומים זה לזה ולמשולש הנתון.

הניצב במשולש ישר-זווית, הוא ממוצע הנדסי של היתר והיטלו על היתר (השווה משפט אויסקלידס).

הגובה ליתר במשולש ישר-זווית, הוא ממוצע הנדסי של היטלי הניצבים על היתר (ולחיפך*).

פרופורציה במעגל

מיתרים במעגל, נחתכים באופן כזה, שמכפלת קטעי האחד שווה למכפלת קטעי השני (ולחיפך*).

אם מנקודה חיצונית למעגל, יוצאים חותכים ומשיק למעגל, אז מכפלת כל חותך בחלקו החיצוני הוא גודל קבוע ושווה לריבוע המשיק.

במצולעים דומים:

- ההיקפים מתיחסים כיחס הדמיון
- השטחים מתיחסים כיחס הדמיון.

נספח:

שטח משולש ABC $S = (abc)/4R$
R - רדיוס המעגל החוסם את המשולש.

רשימת סמלים וקיצורים בהנדסה

$\sphericalangle A$	זווית A
ח.ז	חוצה-זווית
$\sphericalangle C = 90^\circ$	זווית C ישרה
α	אלפא
β	בטא
γ	גמא
δ	דלתא
h_a	גובה לצלע a
m_c	תיכון לצלע c
l_b	חוצה זווית B
$c \perp b$	c מאונך ל- b
A - B	מחברים A ל- B
$a \parallel b$	a מקביל ל- b
$\triangle ABC$	משולש ABC
$\cong$	סמל לחפיפת משולשים
מ.ח. I או צ.ז.צ.	משפט חפיפה ראשון
מ.ח. II או ז.צ.ז.	משפט חפיפה שני
מ.ח. III או צ.צ.צ.	משפט חפיפה שלישי
$\Leftarrow$	מכאן נובע, מסקנה
צ"ל	צריך להוכיח
(ח.מ.ב.ח.)	חלקים מתאימים במשולשים חופפים
ב"ע	בנית עזר
שו"ש	שווה-שוקיים
שו"צ	שווה-צלעות
י.ז.	ישר-זווית
מש.ל.	מה שהיה צריך להוכיח
$\sim$	סמל לדימיון משולשים
a_c	הטל של a על c
Π	פיי מספר קבוע השווה ל- 22/7 או ל- 3.14