

יפה בר אור

טריגונומטריה

3 יחידות לימוד

לחטיבת הביניים ולחטיבה העליונה

הפונקציות הטריגונומטריות

208	1. הצגת הפונקציות הטריגונומטריות של זווית חדה
210	2. הפונקציה סינוס
211	3. הפונקציה קוסינוס
212	4. חישובים בסיוע מחשבון
213	5. שיטת עבודה
217	6. שימוש בפונקציה סינוס לחישוב שטח
219	תרגילים
230	7. הפונקציות טנגנס וקוטנגנס
231	8. שיטת עבודה
233	9. זווית גובה, זווית עומק, זווית ראייה
236	תרגילים
244	10. פונקציות טריגונומטריות של זוויות מיוחדות
245	11. קשרים בין פונקציות טריגונומטריות של אותה זווית
246	12. שימושים
248	13. פתרון בעיות בצורה כללית
251	תרגילים
258	14. המעגל הטריגונומטרי

הפונקציות הטריגונומטריות

טריגונומטריה היא מקצוע ישומי, העוסק בעיקר בפתרון משולשים, היינו חישוב של צלעות וזוויות במשולש.

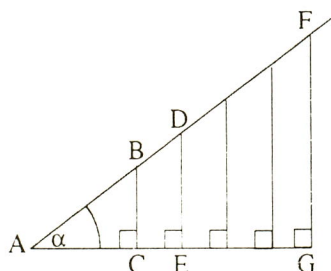
השם טריגונומטריה מורכב משתי מילים:

טריגון - משולש, ו- מטריה - מדידה, כלומר מדידת משולשים.

גם מקצוע ההנדסה מאפשר פתרון משולשים, אולם, הכלים המדעיים שמספקת הטריגונומטריה רבים ויעילים יותר, והם משמשים בסיס לענפים אחרים במתמטיקה ובפיסיקה.

הטריגונומטריה מגדירה מידות חדשות לזווית, ע"י יחסים בין צלעות. אלה הן הפונקציות הטריגונומטריות.

1. הצגת הפונקציות הטריגונומטריות של זווית חדה.



1.1 נתונה זווית חדה α . מנקודה B, שעל

שוק אחת של α בונים אנך לשוק האחרת.

$$BC \perp AC$$

נוצר משולש ישר-זווית ABC. ניתן ליצור

אינסוף משולשים כאלה, ע"י הורדת אנכים

(DE, FG, וכו'), משוק אחת לאחרת.

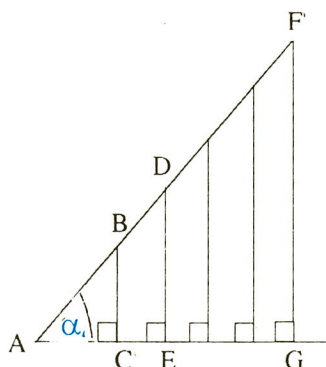
כל המשולשים הנוצרים בדרך זו דומים, ע"ס שוויון שתי זוויות: α הנתונה, וזווית ישרה. לכן, צלעות המשולשים הללו פרופורציוניות:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} = \dots = \frac{FG}{AF}$$

כל היחסים BC/AB , DE/AD , וכו' שווים

זה לזה ולגודל מסוים, נניח k . אם נשנה את

גודל הזווית ל- α_1 , ישתנו אורכי האנכים.



מדמיון המשולשים מתקבל:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} = \dots = \frac{FG}{AF}$$

גם במקרה זה יהיו כל היחסים שווים, אך הפעם לגודל אחר k .

מסקנה

יחס בין שתי צלעות במשולש תלוי אך ורק בגודל הזווית - פונקציה של הזווית.

1.2 קיימים שישה יחסים בין צלעות

משולש ישר-זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$):

- | | | |
|----------|----------|----------|
| 1. a/c | 2. b/c | 3. a/b |
| 4. b/a | 5. c/b | 6. c/a |

ששת היחסים הללו מבטאים שש פונקציות טריגונומטריות של הזווית (α).

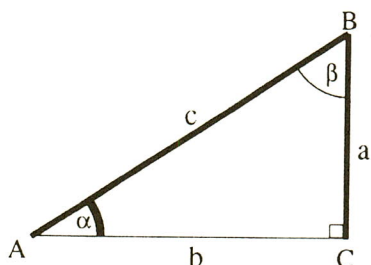
כינויין - לפי הסדר הרשום להלן:

1. **סינוס** זווית - היחס בין הניצב שמול הזווית, ליתר.
2. **קוסינוס** זווית - היחס בין הניצב שליד הזווית, ליתר.
3. **טנגנס** זווית - היחס בין הניצב שמול הזווית, לניצב שלידה.
4. **קוטנגנס** זווית - היחס בין הניצב שליד הזווית, לניצב שמולה.
5. **סקנס** זווית - היחס בין היתר, לניצב שליד הזווית.
6. **קוסקנס** זווית - היחס בין היתר, לניצב שמול הזווית.

בסעיפים הבאים נבחן תכונות של ארבע הפונקציות הטריגונומטריות הראשונות.

2. הפונקציה סינוס.

2.1 סינוס זווית חדה, במשולש ישר-זווית, שווה ליחס בין הניצב שמול הזווית,



ליתר. סימונה: $\sin \alpha$

$$\sin \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית } \alpha}{\text{היתר}}$$

במשולש ABC ($\angle C = 90^\circ$):

$$\sin \alpha = a/c$$

$$\sin \beta = b/c \quad \text{וכן:}$$

הערך של $\sin \alpha$ הוא מספר טהור (ללא יחידות), כי הוא מציין יחס בין ניצב ליתר.

מסקנה

ערך הפונקציה סינוס קטן מ-1, כי הניצבים במשולש ישר-זווית קטנים היתר.

2.2 שימושים.

הסינוס מסייע לפתרון משולש ישר-זווית, בשלושה מקרים:

א. אם נתונים היתר c וזווית חדה α , ניתן לחשב את הניצב a , ע"י הכפלת

$$a = c \sin \alpha \quad \text{היתר בסינוס הזווית שמול הניצב הנ"ל:}$$

שוויון זה נובע מהנוסחה: $\sin \alpha = a/c$ ע"י הכפלת שני אגפיו ב- c .

ב. אם נתונים ניצב a והזווית החדה שמולו α , אפשר לחשב את היתר c , ע"י

$$c = a / \sin \alpha \quad \text{חילוק הניצב בסינוס הזווית שמולו:}$$

ג. אם נתונים היתר c וניצב a , ניתן לחשב באמצעותם את סינוס הזווית

$$\sin \alpha = a/c \quad \text{המונחת מול הניצב:}$$

3. הפונקציה קוסינוס.

3.1 קוסינוס זווית חדה, במשולש ישר-זווית שווה ליחס בין הניצב שליד זווית זו,

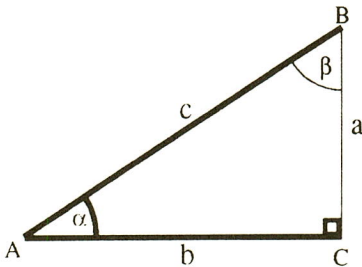
ליתר. סימונה: $\cos \alpha$.

$$\cos \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית } \alpha}{\text{היתר}}$$

במשולש ABC ($\angle C = 90^\circ$):

$$\cos \alpha = b/c$$

$$\cos \beta = a/c \quad \text{וכן:}$$



מסקנה

ערכה של הפונקציה קוסינוס קטן מ-1, כי הניצבים קטנים מהיתר.

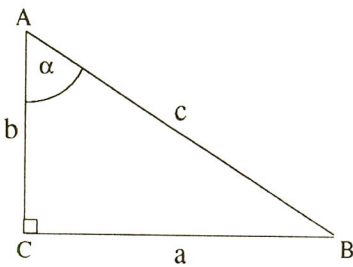
3.2 מהגדרת הפונקציות הטריגונומטריות - סינוס וקוסינוס - מתקבל שסינוס של

זווית חדה שווה לקוסינוס של הזווית המשלימה אותה ל- 90° .

מכאן גם השם קוסינוס - משלים (complement) לסינוס.

$$\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha)$$



הסבר

$$\sin \alpha = a/c$$

$$\cos \beta = \cos (90^\circ - \alpha) = a/c$$

$$\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha) \quad \text{לכן}$$

3.3 שימושים.

הפונקציה קוסינוס מסייעת לפתרון משולש ישר-זווית במקרים הבאים:

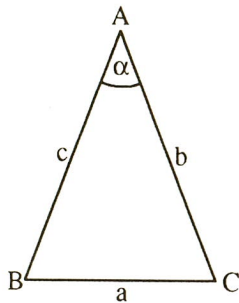
א. אם נתונים היתר c וזווית חדה α , אפשר לחשב את הניצב שליד הזווית α ,

$$b = c \cos \alpha \quad \text{ע"י הכפלת היתר בקוסינוס הזווית הנתונה:}$$

ב. אם נתונים ניצב b והזווית החדה שלידו α , אפשר לחשב את היתר, ע"י חילוק הניצב בקוסינוס הזווית שלידו:

$$c = b / \cos \alpha$$

ג. אם נתונים ניצב a והיתר c , אפשר לחשב את קוסינוס הזווית שליד הניצב

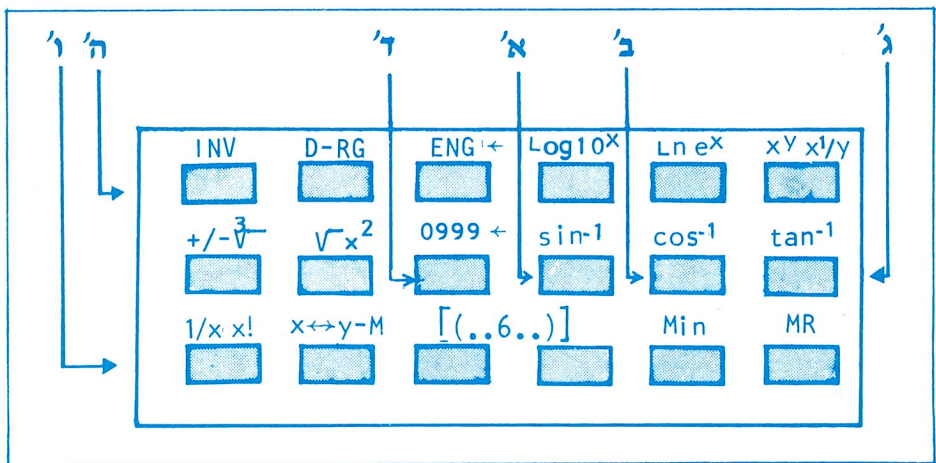
$$\cos \alpha = b/c$$


שים לב !

האותיות a , b ו- c הן רק סמלים לניצבים וליתר של משולש ישר-זווית. למשל במשולש ABC ($AB=AC$), המנה a/c אינה שווה ל- $\sin \alpha$, כיוון שהצלעות a ו- c אינן ניצב ויתר במשולש ישר-זווית.

4. חישובים בסיוע מחשבון

4.1 כאמור, ערך פונקציה טריגונומטרית, תלוי אך ורק בגודל הזווית. לכן, כאשר נתונה זווית α , אפשר להעזר במחשבון לחישוב ערכה של הפונקציה המבוקשת. נעזר בשרטוט הבא, של לוח מקשי מחשבון, כדי ללמוד את דרך השימוש בה.



4.2 חישוב הסינוס והקוסינוס של זווית נתונה.

כדי לחשב סינוס של זווית, למשל 48° , מקישים את מספר המעלות 48° ואח"כ על

מקש הסינוס. מקבלים $\sin 48^\circ = 0.7431$

אם הזווית מורכבת ממעלות ודקות, למשל $48^\circ 15'$, מקישים לפי הסדר הבא:

מעלות (48), מקש ד', דקות (15) ושוב ד'.

המחשבון הפך את הדקות לחלקי המעלה 48.25. מקבלים $\sin 48^\circ 15' = 0.7461$

ערך הקוסינוס של הזווית מתקבל לפי אותו נוהל, כאשר במקום על מקש ה- $\sin$,

מקישים על מקש ה- $\cos$. למשל $\cos 48^\circ 15' = 0.6586$

4.3 חישוב הזווית, כאשר נתון הסינוס או הקוסינוס.

נתון $\sin \alpha = 0.4848$. יש לחשב את α .

מקישים את המספר 0.4848, ואח"כ מקש ה-INV, ואחריו מקש הסינוס.

מתקבל: $\alpha = 29^\circ$.

אם המספר המתקבל עבור α מכיל גם חלק עשרוני, למשל, 13.6° , ומעוניינים לקבל

את הזווית במעלות ובדקות, נעזרים בשני המקשים ה' ו-ד', לפי הסדר הכתוב.

על הלוח מופיע המספר $13^\circ 36'$ שהוא בעצם $13^\circ 36'$ (המספר 12.2 מציין

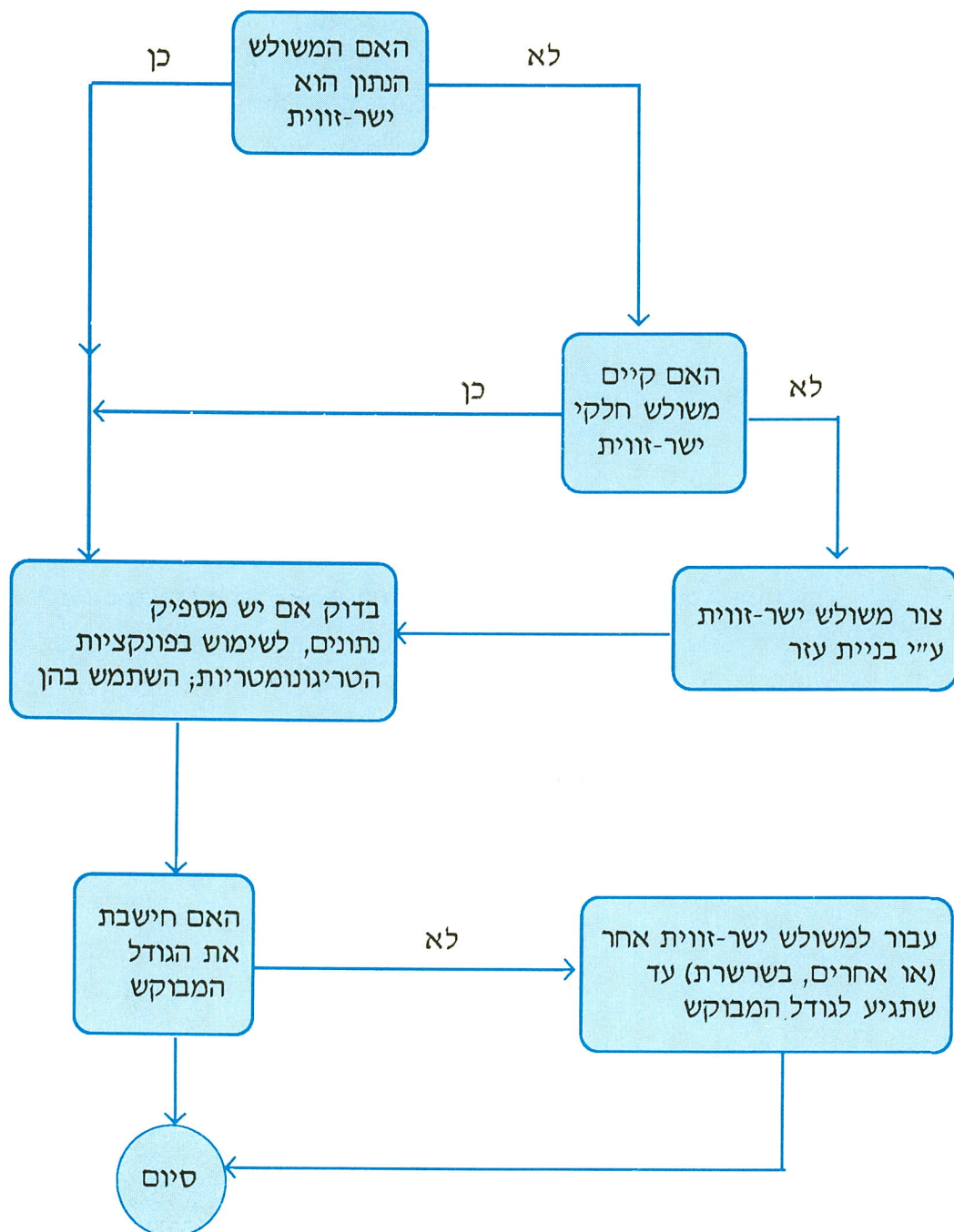
שניות, והיות שאנו עובדים עד דיוק של מעלות לא נתיחס לזה).

באותה שיטה, אם $\cos \alpha = 0.2345$ אז $\alpha = 76^\circ 2'$.

5. שיטת עבודה.

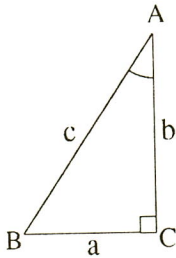
5.1 במהלך פתרון בעיה בטריגונומטריה, כדאי לבצע את הצעדים הבאים:

- לבדוק אם המשולש הנתון הוא ישר-זווית; אם לא, לחפש או ליצור ע"י בניית עזר, משולש חלקי שהוא ישר-זווית.
- להתרכז במשולש, שבו יש מספיק נתונים לחישוב הגודל המבוקש, או גודל אחר, שישמש לחישוב הגודל המבוקש.
- בכל שלב של הפתרון יש לציין את המשולש שאותו פותרים.



דוגמה א

במשולש ישר-זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$) נתון: $c = 12.45$ ס"מ, $\angle A = 35^\circ 51'$.
פתור את המשולש.



פירוק

המשולש ABC ישר-זווית,

$$\angle B = 90^\circ - \angle A = 54^\circ 9'$$

לחישוב a ו- b נשתמש בסינוס:

$$\sin A = a/c$$

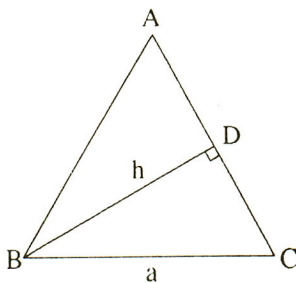
$$a = c \sin A = 12.45 \sin 35^\circ 51' = 12.45 \cdot 0.5857 = 7.29 \text{ ס"מ}$$

כדי לחשב את b משתמשים בפונקצית הקוסינוס ומקבלים:

$$b = 12.45 \cos 35^\circ 51' = 10.09 \text{ ס"מ}$$

דוגמה ב

במשולש שווה-צלעות ABC, נתון הגובה $h = 35.8$ ס"מ. חשב את אורך צלע המשולש.



פירוק

במשולש BDC, שהוא ישר-זווית, נתון:

$$h = 35.8 \text{ ס"מ}, \angle C = 60^\circ$$

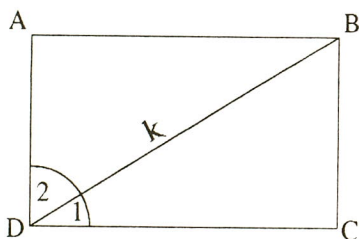
לכן אפשר לחשב את אורך הצלע a :

$$\sin C = h/a$$

$$a = h / \sin C = 35.8 / \sin 60^\circ = 41.3 \text{ ס"מ}$$

דוגמה ג

במלבן, שווה אחת הצלעות ל- 27.8 ס"מ והאלכסון ל- 37 ס"מ. חשב את גודל הזוויות, שיוצר האלכסון עם צלעות המלבן.



פירעון

המשולש BDC הוא ישר-זווית לכן,

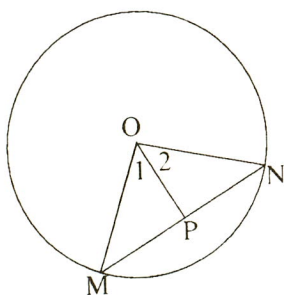
$$\cos D_1 = a/k = 27.8 / 37 = 0.75$$

$$\angle D_1 = 41^\circ 17' \quad \leftarrow \text{(בדוק !)}$$

$$\text{וכן } \angle D_2 = 48^\circ 43' \quad \leftarrow \text{(משלימה את } \angle D_1 \text{ ל-} 90^\circ \text{).}$$

דוגמה ד

במעגל שמחוגו 1.1 ס"מ, נתון מיתר שאורכו 0.95 ס"מ. חשב את הזווית המרכזית הנשענת על מיתר זה.



פירעון

$$\text{בי"ע: } OP \perp MN$$

$$MP = PN = 0.95 / 2 = 0.475 \quad \leftarrow$$

$$\angle O_1 = \angle O_2 \quad \leftarrow \text{(נמק !)}$$

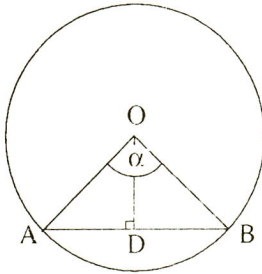
במשולש OPM שהוא ישר-זווית ב- P:

$$\sin O_1 = MP/R = 0.475 / 1.1 = 0.4318$$

$$\angle O_1 = 25.58^\circ \quad \leftarrow \text{(בדוק !)}$$

$$\angle O = 2\angle O_1 = 51.17^\circ = 51^\circ 9' \quad \leftarrow$$

קוטרו של מעגל O שווה ל- 23.4 ס"מ. במעגל זה רשמו מיתר 15 ס"מ = AB.
חשב את אורך הקשת AB (k).



פתרון

$$k = 2\pi R \cdot \alpha / 360$$

נחשב את α . במשולש OBD :

$$\sin(\alpha/2) = BD/OB = 7.5 / 11.7 = 0.64$$

$$\alpha/2 = 39.86^\circ \Rightarrow \alpha = 79.7^\circ$$

$$k = 2\pi R \cdot \alpha / 360 = 2 \cdot 3.14 \cdot 11.7 \cdot 79.7^\circ / 360^\circ = 16.27 \text{ ס"מ}$$

6. שימוש בפונקציה סינוס לחישוב שטח.

6.1 משפט

שטח משולש שווה למחצית מכפלת שתי צלעות, בסינוס הזווית הכלואה



ביניהן:

$$S = 1/2 ab \sin C$$

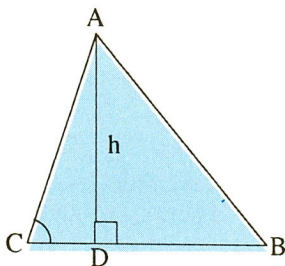
נוכיח קיום הנוסחה לגבי כל ערך של $\angle C$

א. $\angle C$ חדה

בי"ע: $AD \perp CB$

לכן במשולש ACD: $h = b \sin C$

$$S = 1/2 ah = 1/2 ab \sin C \quad \Leftarrow$$



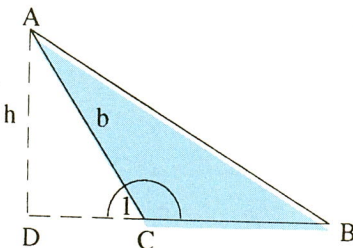
ב. כאשר הזווית C ישרה, ערך הסינוס הוא 1 (הניצב מתלכד עם היתר). לכן

מתקבל $S = 1/2 ab$ ונוסחה זו אמנם תקפה.

ג. אם הזווית C קהה, אז במשולש ADC :

$$h = b \sin C_1 = b \sin (180^\circ - \angle C)$$

$$S = 1/2 ab \sin (180^\circ - \angle C)$$



בהמשך נרחיב את הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות ונראה, שערכי הסינוס של הזווית C ושל הזווית C_1 המשלימה אותה ל- 180° שווים זה לזה. לכן, הנוסחה תקפה גם במקרה זה.

6.2 משפט

שטח המקבילית שווה למכפלת שתי צלעות סמוכות בסינוס הזווית שביניהן.



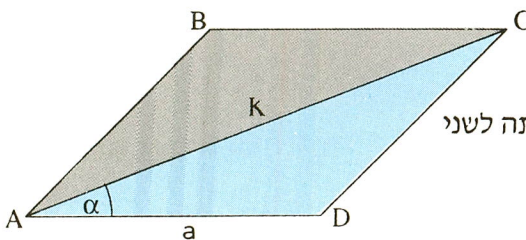
הוכח !

$$S = ab \sin \alpha$$

6.3 דוגמאות

דוגמה א

במקבילית, נתונה צלע $a = 23.7$ ס"מ, אלכסון $k = 17.3$ ס"מ והזווית ביניהם $\alpha = 68^\circ 17'$. חשב את שטח המקבילית S .



פתרון

אלכסון במקבילית, מחלק אותה לשני משולשים שווים בשיטחיהם.

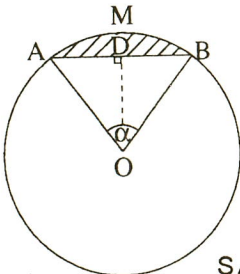
נחשב תחילה את S_{ADC}

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} a k \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 23.7 \cdot 17.3 \cdot \sin 68^\circ 17'$$

$$S_1 = 190.5 \text{ סמ"ר} \Rightarrow S_{ABCD} = 2S_1 = 381$$

דוגמה ב

במעגל O, שמחוגו 11.7 ס"מ, רשום מיתר AB = 15 ס"מ. חשב את שטח המקטע AMB.



פתרון

בסעיף 6, דוגמה ה' קיבלנו (לפי אותם

$$\text{נתונים): } \alpha = 79.7^\circ$$

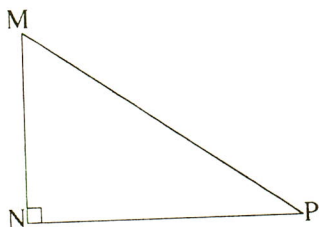
נחשב את שטח הגזרה:

$$S_{AmBO} = \pi R^2 \alpha / 360 = 3.14 \cdot 11.7^2 \cdot 79.7 / 360 = 95.16 \text{ סמ"ר}$$

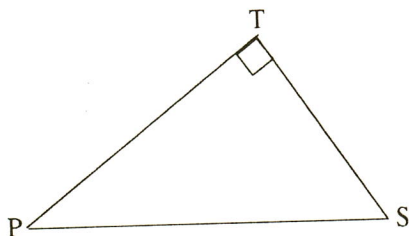
$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot 11.7^2 \cdot \sin 79.9^\circ = 67.34 \text{ סמ"ר} \quad \Delta AOB \text{ שטח}$$

$$S_{AmB} = 95.16 - 67.34 = 27.82 \text{ סמ"ר} \quad \text{לפיכך, שטח המקטע}$$

תרגילים



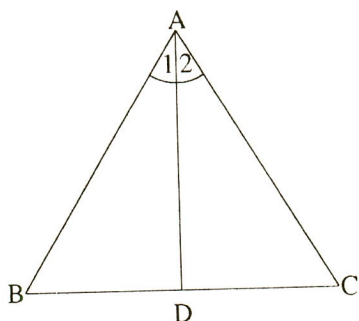
1. MPN הוא משולש ישר-זווית
($\angle N = 90^\circ$). כתוב את היחס המצויין:
 $\cos P$, $\cos M$, $\sin M$, $\sin P$



2. המשולש PTS הוא ישר-זווית
($\angle T = 90^\circ$). מה מצויין כל אחד מהיחסים הבאים:
 $\frac{PT}{PS}$, $\frac{TS}{PS}$

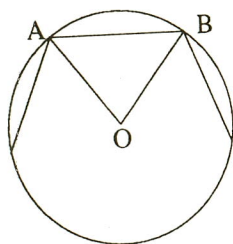
3. בתנאי הבעיה הקודמת - TM הוא הגובה ליתר.
א. התייחס למשולש PTM וכתוב את היחס המצויין:
 $\cos MTP$, $\sin PTM$, $\cos P$, $\sin P$

- ב. מה מציינים היחסים $\frac{MT}{TS}$ ו- $\frac{MS}{TS}$ במשולש MTS

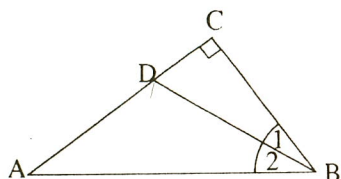


4. AD הוא הגובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$).
כתוב את היחסים המתאימים ל:
 $\sin C$, $\cos B$, $\cos A_2$, $\sin A_1$

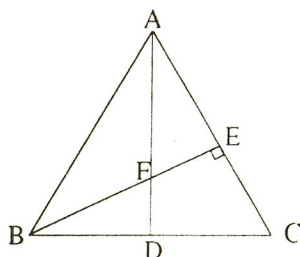
5. התייחס למשולש, שבבעיה הקודמת. BM הוא גובה לשוק AC (על M).
בטא באמצעות יחסים את: $\cos A$, $\sin A$, $\sin MBC$, $\sin C$



6. מצולע משוכלל בעל n צלעות, חסום במעגל O . הבע את היחס בין צלע המצולע AB ורדיוס המעגל, ע"י פונקציה טריגונומטרית של זווית מרכזית.



7. BD הוא חוצה הזווית B , במשולש ABC ($\angle C = 90^\circ$). בטא את היחס CD/AD באמצעות פונקציה טריגונומטרית של הזווית A .



8. זווית הראש A במשולש שווה שוק ABC שווה ל- 2α . AD - תיכון לבסיס, BE - גובה לשוק. כתוב חמישה יחסים, שכל אחד מהם מבטא את $\sin \alpha$.

9. התייחס לנתונים, שבתרגיל הקודם וכתוב פונקציה טריגונומטרית, שמבוטאת ע"י היחס:

א. $BE:AB$ ב. $AE:AF$

10. הבע את הפונקציות הטריגונומטריות הבאות, ע"י פונקציות של זוויות

אחרות: $\cos 30^\circ, \sin 45^\circ, \cos 72^\circ, \sin 36^\circ$
 $\cos 67^\circ 5', \cos 29^\circ 4', \sin 43^\circ 45'$

11. שרטט זווית בת 65° והורד - מנקודה כלשהיא על שוקה האחת - אנך לשוק השניה. מדוד בסרגל את צלעות המשולש שנוצר, וחשב בעזרתן את הערכים של: $\sin 65^\circ, \cos 65^\circ, \sin 25^\circ, \cos 25^\circ$

12. השתמש במחשבון ובדוק את השוויונים הבאים :

$$\begin{array}{lll} \sin 147^{\circ}20' = 0.5398 & \sin 42^{\circ} = 0.6691 & \cos 48^{\circ}8' = 0.6673 \\ \sin 33.6^{\circ} = 0.5534 & \cos 42^{\circ} = 0.9999 & \cos 57^{\circ} = 0.5446 \end{array}$$

13. מצא בעזרת מחשבון את הערכים של :

$$\begin{array}{lll} \cos 1^{\circ}42' & , \sin 100^{\circ}35' & , \sin 37^{\circ}45' \\ \sin 38' & , \cos 49.23^{\circ} & , \cos 2^{\circ}13' \end{array}$$

14. השתמש במחשבון והראה כי :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \sin A = 0.6325 & \Leftarrow A = 39.23^{\circ} = 39^{\circ}14' \\ \text{ב.} & \cos A = 3/4 & \Leftarrow A = 41.41^{\circ} = 41^{\circ}24' \\ \text{ג.} & \sin A = \sqrt{3}/2 & \Leftarrow A = 60^{\circ} \\ \text{ד.} & \cos A = 12/35 & \Leftarrow A = 65.91^{\circ} = 65^{\circ}56' \end{array}$$

15. מצא את גודל הזווית A, אם נתון :

$$\cos A = \sqrt{2}/2, \sin A = 2/3, \cos A = 0.09, \sin A = 0.4508$$

16. ABC משולש ישר-זווית ב-C. נתון : $AB = 12.35$ ס"מ, $\sphericalangle A = 47^{\circ}$.
חשב את אורך הניצב BC.

17. ABC - משולש ישר-זווית ב-C ונתון : $AB = 20.7$ ס"מ, $\sphericalangle A = 75.6^{\circ}$.
חשב את אורך הניצבים a ו-b.

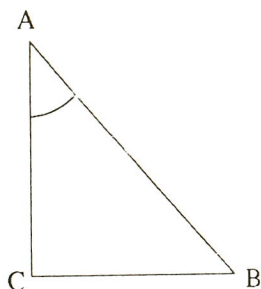
18. במשולש ABC נתון $\sphericalangle C = 90^{\circ}$, $\sphericalangle B = 38^{\circ}12'$, $AB = 8.3$ ס"מ.
חשב את אורך הניצב BC.

19. הניצב a, במשולש ישר-זווית, שווה ל-25.2 ס"מ, הזווית מולו- $\alpha = 49^{\circ}$.
חשב את אורך היתר.

20. הניצב b, במשולש ישר-זווית שווה ל-45.6 ס"מ, הזווית שלידו $\beta = 15^{\circ}38'$.
חשב את היתר.

21. הניצב a , במשולש ישר-זווית, שווה ל- 6.4 ס"מ והיתר 8.7 ס"מ c .
חשב את הזווית α , שמול הניצב a .

22. במשולש ישר-זווית, נתון ניצב $a = 13.4$ ס"מ והיתר $c = 19$ ס"מ. חשב את הזווית β , שליד הניצב הנתון.



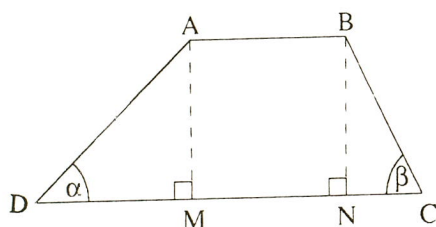
23. במשולש ABC : $\angle C = 90^\circ$,
27.8 ס"מ b , $\angle A = 58^\circ$.
פתור את המשולש (חשב את ערך הזווית B ואת הצלעות a ו- c).

24. במשולש ABC : $\angle C = 90^\circ$, $a = 30.14$ ס"מ, $\angle A = 3^\circ 34'$.
פתור את המשולש.

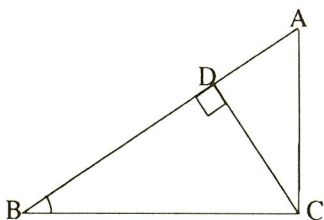
25. במשולש ABC : $\angle C = 90^\circ$, $a = 14.3$ ס"מ, הזווית A גדולה ב- 22° מהזווית B . פתור את המשולש.

26. במשולש MNP : $\angle N = 90^\circ$ ונתון: $NP = 21$ ס"מ, $MP = 32.3$ ס"מ.
פתור את המשולש.
חשב את הצלע MN בשתי דרכים, אחת מהן, ללא טריגונומטריה.

27. אורכי הניצבים במשולש ישר-זווית הם: 12.4 ס"מ ו- 16.7 ס"מ.
פתור את המשולש.



28. בטרפז $ABCD$ נתון:
 $BC = 15.4$ ס"מ,
 $\alpha = 42.6^\circ$, $\beta = 56^\circ 8'$.
חשב את הגובה BN ואת אורך השוק AD .



29. במשולש ABC נתון :

$$\angle B = 38^{\circ}12', a = 54.5 \text{ ס"מ}$$

חשב את אורך הגובה

לצלע c - CD.

30. העזר בתוצאות התרגיל הקודם, ובנוסף: $\angle C = 75^{\circ}18'$ וחשב את אורך AC.

31. במשולש ABC נתון: $AB = 14$ ס"מ, $BC = 17.5$ ס"מ, $\angle B = 73^{\circ}13'$. חשב את שטחו.

32. במשולש PTS נתון: $PT = 2.5$ ס"מ, $TS = 3.2$ ס"מ, $\angle T = 125^{\circ}12'$. חשב את שטחו.

33. במשולש ישר-זווית ABC ($\angle C = 90^{\circ}$), נתון: $AB = 29$ ס"מ, $\angle B = 39^{\circ}42'$. חשב את הניצב BC ואת שטח המשולש ABC.

34. במשולש שוו"ש ABC ($AB = AC$), שווה השוק ל- 5.2 ס"מ וזווית הבסיס ל- $76^{\circ}17'$. חשב את הגובה לבסיס.

35. במשולש שווה-שוקיים כנייל, חשב את הבסיס BC ואת שטח המשולש.

36. במשולש שוו"ש MNP ($MN = MP$), נתון: $NP = 13.6$ ס"מ, $\angle P = 68^{\circ}21'$. חשב את שוק המשולש ואת הגובה לבסיס.

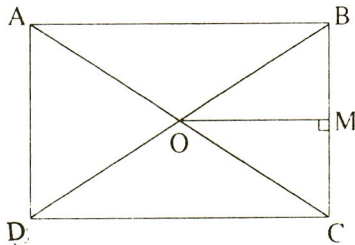
37. במשולש שוו"ש MNP ($MN = MP$) נתון: $\angle M = 103.6^{\circ}$, $MN = 8.2$ ס"מ. חשב את בסיס המשולש.

38. במשולש שוו"ש PQS ($PQ = PS$), נתון: $QS = 31$ ס"מ, $PQ = 38.5$ ס"מ. חשב את הזוויות.

39. היחס בין בסיס משולש שו"ש לשוק הוא 3:5. חשב את זוויות המשולש.
40. במשולש ABC נתון: $AB = BC = 18$ ס"מ, $\angle B = 38^\circ 35'$. חשב את שטחו.
41. במשולש שו"ש ABC נתון: $AB = AC = 32.5$ ס"מ, $\angle B = 25^\circ 30'$.
חשב את שטחו.
42. במשולש ABC נתון: $AB = AC$, $BD \perp AC$, $BC = 33.4$ ס"מ, $\angle B = 69^\circ 14'$.
חשב: א. את אורך הקטע BD.
ב. את שטח המשולש BDC.
43. במשולש שו"ש ABC ($AB = AC$), BD הוא גובה לשוק AC ונתון:
 $BD = 15$ ס"מ, $\angle B = 75^\circ$. חשב את אורכי הקטעים BC, DC ו-AD.
44. במשולש שו"ש ABC (A - קודקד הראש), BD - גובה לשוק ונתון:
 $CD = 8.5$ ס"מ, $BC = 22$ ס"מ. חשב את הזוויות CBD ו-DBA.
45. במשולש ABC: $AB = AC$, AD תיכון לבסיס, CE גובה לשוק AB ונתון:
 $CE = 11.5$ ס"מ, $BD = 7.5$ ס"מ. חשב את הזווית A.
46. הנתונים כמו בתרגיל הקודם. כמו כן נתון: $AE = 8$ ס"מ.
חשב: א. את אורך הקטע AO.
ב. את שטחי המשולשים AOE ו-AOC.
47. במשולש ישר-זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$), נתון: $AB = 15$ ס"מ.
ו- $\angle B = 42^\circ$. חשב את אורך חוצה הזווית B.
48. במלבן ABCD נתון האלכסון $BD = 25.2$ ס"מ, וזווית $\angle BDC = 28^\circ$. חשב את צלעות המלבן.

49. חשב את שטח המלבן שבתרגיל 48, בלי להעזר בצלעות.

50. במלבן ABCD, נתון $BC = 17$ ס"מ, $BD = 22.4$ ס"מ.
 חשב א. את הזוויות בין האלכסון וצלעות המלבן.
 ב. את הזווית הקהה שבין האלכסונים.

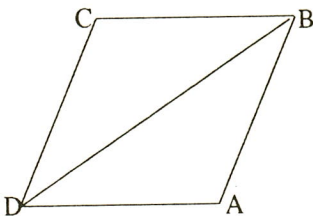


51. O נקודת מפגש אלכסוני המלבן ABCD. נתון: $OM \perp CD$,
 $AB = 10.8$ ס"מ, $BD = 17$ ס"מ.
 חשב את הזווית BOC ואת הקטע OM.

52. בתנאי התרגיל הקודם, חשב את שטח הטרפז ADMO.

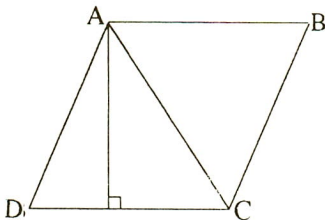
53. היחס בין צלע המלבן לאלכסונו שווה ל- $5:2$. חשב את הזווית בין האלכסונים.

54. במעוין ABCD: $AB = 5.6$ ס"מ, $\angle A = 82^\circ$. חשב את אורך האלכסונים.



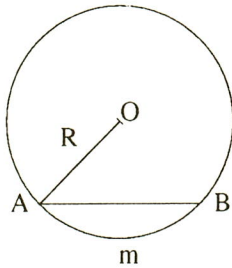
55. במעוין ABCD נתון:
 $BD = 3.08$ ס"מ, $\angle A = 108^\circ 26'$
 חשב: א. את צלע המעוין
 ב. את שטחו

56. במעוין נתונים האלכסון הקטן - 32.4 ס"מ והצלע - 41.5 ס"מ. חשב את זווית המעוין ואת הגובה.



57. גובה המעוין ABCD:
 $h = 13.8$ ס"מ,
 האלכסון: $AC = 16$ ס"מ.
 חשב את זוויות המעוין ואת צלעו.

58. היחס בין אחד מאלכסוני המעוין לצלעו 5:4. חשב את הזווית הקהה של המעוין.
59. במעוין ABCD נתון $\angle B = 69^\circ$. האלכסון הגדול $BD = 26.5$ ס"מ. חשב את גובה המעוין ואת שטחו.
רמז: הורד גובה מהנקודה D, על המשך הצלע BC.
60. צלעות המקבילית הן: $a = 23$ ס"מ, $b = 28.6$ ס"מ. הזווית החדה של המקבילית היא בת $12^\circ 77'$. חשב את שטח המקבילית.
61. במקבילית ABCD, יוצר האלכסון k, זווית בת $10^\circ 25'$ עם הצלע a.
נתון: $k = 135$ ס"מ, $a = 88.4$ ס"מ.
חשב: א. את שטח המקבילית.
ב. את הגובה לצלע a.
62. במעגל שמחוגו 15 ס"מ, רשום מיתר AB. הזווית המרכזית AOB בת 87° .
חשב: א. את אורך המיתר
ב. את שטח המשולש AOB.
63. מחומש משוכלל חסום במעגל בעל רדיוס 28 ס"מ R . חשב את צלע המחומש ואת היקפו.
64. מתושע משוכלל, שצלעו שווה ל-10.8 ס"מ חסום במעגל. חשב את שטחו.
65. היקפו של מצולע משוכלל, בעל 10 צלעות שווה 324 ס"מ. חשב את שטחו.
66. שטחו של מתומן משוכלל 125.8 סמ"ר. חשב את רדיוס המעגל החוסם אותו.

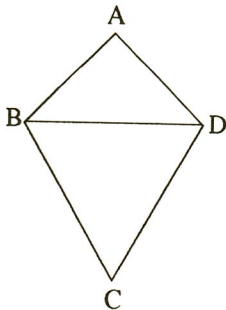


67. במעגל O, בעל רדיוס $R = 14.7$ ס"מ, רשום $AB = 21$ ס"מ. חשב את היקף המקטע AmB .

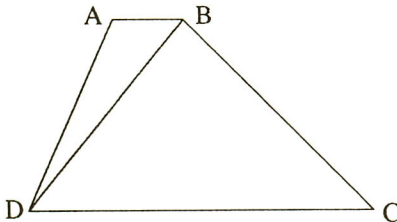
68. במעגל O, בעל רדיוס 38 ס"מ, $R = 38$ ס"מ, רשום מיתר $MN = 55.4$ ס"מ. חשב את שטח הגזרה MON .

69. בתנאי הבעיה הקודמת, חשב את שטחי המקטעים, הנוצרים במעגל ע"י המיתר MN .

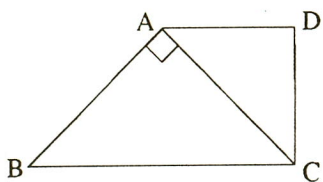
70. היחס בין מיתר במעגל והרדיוס הוא 4:5.
א. מהו היחס בין הקשתות, שיוצר מיתר זה על המעגל?
ב. חשב את היחס בין שטחי הגזרות הנוצרות.



71. צלעות הדלתון הן:
 $AB = AD = 8$ ס"מ,
 $BC = CD = 11$ ס"מ,
אורך האלכסון $BD = 14$ ס"מ.
חשב את זוויות הדלתון
ואת אורך האלכסון AC .



72. בטרפז $ABCD$, שווה השוק BC לאלכסון BD ונתון: $BC = 7.6$ ס"מ, $AD = 5.2$ ס"מ, $\angle C = 38^\circ 30'$.
חשב את הבסיס הקטן של הטרפז ואת שטחו.



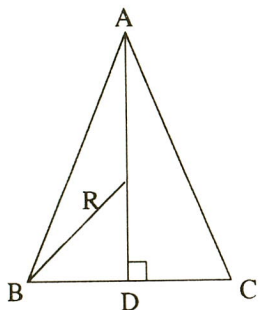
73. בטרפז ישר-זווית מאונך האלכסון

הקצר AC לשוק הארוכה AB.

נתון: $AD = 4.8$ ס"מ,

$\angle ACD = 38^\circ$. חשב את

השוק AB, ואת שטח הטרפז.



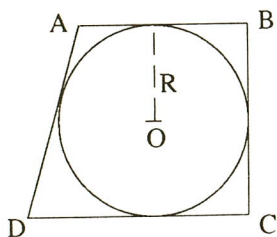
74. במשולש שוו"ש ABC ($AB = AC$),

נתון הגובה $AD = 42.3$ ס"מ,

וזווית $\angle B = 78.6^\circ$.

חשב את רדיוס המעגל

החוסם את המשולש.



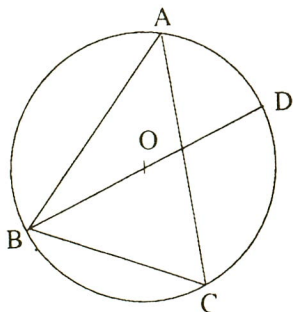
75. המעגל O חסום בטרפז ישר-זווית

ABCD, $AD = 14.5$ ס"מ,

$\angle D = 42^\circ 20'$

חשב: א. את רדיוס המעגל

ב. את שטח הטרפז



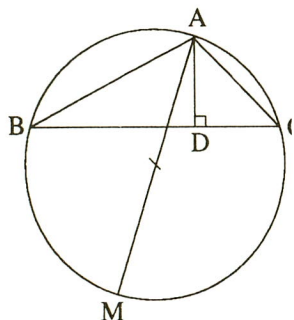
76*. המשולש ABC חסום במעגל O.

BD קוטר.

נתון: $CD = 7.5$ ס"מ,

$\angle ABD = 23^\circ$, $R = 6.8$ ס"מ.

חשב את שטח המשולש ABC.



77*. משולש ABC חסום במעגל O. AD

גובה לצלע BC. הקוטר AM מחלק

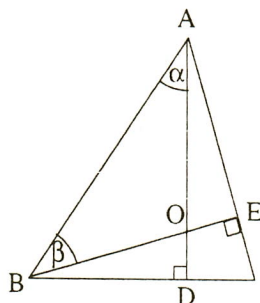
את הזווית BAD ביחס של 1:5.

נתון: $\angle AMB = 33^\circ$, $R = 6$ ס"מ,

חשב: א. את הגובה AD

ב. את שטח המשולש.





78* במשולש ABC : 8 ס"מ = AB

, $\alpha = 57^\circ$, $BE \perp AC$, $AD \perp BC$

: חשב $\beta = 15^\circ$

א. את הגבהים AD ו- BE.

ב. את הקטעים OE, BO, OD, AO.

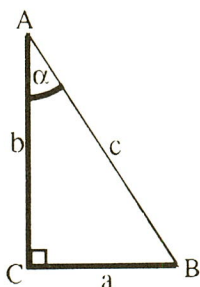
תשובות



- $\cos P = \sin S$, $\cos S = \sin P$ (2) PN/MP , MN/MP , PN/MP , MN/MP (1)
 $2\sin(180^\circ/n)$ (6) AD/AC , BD/AB , AD/AC , BD/AB (4)
 $\sin 22^\circ 55' = \cos 67^\circ 5'$, $\cos 46^\circ 15' = \sin 43^\circ 45'$ (10) $\sin A$ (7)
 $\sin 84^\circ 50' , 26^\circ 47'$ (15) $\sin 38' = 0.011$ (13) $\cos 25^\circ = 0.9$ (11)
 6.52 (18) $5.15 , 20.05$ (17) 9.03 (16) $45^\circ , 41^\circ 48'$
 $45^\circ 8'$ (22) $47^\circ 21'$ (21) 47.35 (20) 33.39 (19)
 $\angle B = 54^\circ 26'$, $c = 51.82$, $b = 42.15$ (24) $44.49 , 52.46 , 32^\circ$ (23)
 $MN = 24.54$ (26) $\angle B = 34^\circ$, $\angle A = 56^\circ$, $c = 17.25$, $b = 9.64$ (25)
 $BN = 12.78$ (28) $\angle A = 36^\circ 35'$, $c = 20.8$ (27) $\angle M = 40^\circ 33'$
 117.3 (31) 36.75 (30) 33.7 (29) $AD = 18.89$
 5.05 (34) $S = 206.6$, $a = 22.31$ (33) 3.27 (32)
 12.89 (37) $h = 17.13$, $MN = 18.43$ (36) 2.46 (35)
 101.03 (40) $73^\circ 46' , 53^\circ 7'$ (39) $66^\circ 15' , 47^\circ 30'$ (38)
 $CD = 4.02$, $AD = 25.98$ (43) 31.23 . $\angle$ (42) 410.43 (41)
 $79^\circ 53'$ (45) $\angle DBA = 44^\circ 32'$, $\angle CBD = 22^\circ 44'$ (44) $BC = 15.53$
 263.24 (49) 11.94 (47) $SAOC = 19.2$, $SAOE = 26.79$ (46)
 53.17 (52) $6.56 , 101^\circ 7'$ (51) $98^\circ 44'$. $\angle$ $40^\circ 38' , 49^\circ 22'$. $\angle$ (50)
 $134^\circ 3' , 45^\circ 57'$ (56) 1.9 . $\angle$ (55) $8.45 , 7.35$ (54) $47^\circ 9'$ (53)
 $132^\circ 51'$ (58) $AB = 15.81$, $\angle B = 60^\circ 48'$ (57) 23.29
 $S = 5075$ (61) 641.45 (60) $S = 241.3$, $h = 15.01$ (59)
 721.1 (64) $164.58 , 32.92$ (63) $S = 112.34$, $AB = 20.65$ (62)
 1179.4 (68) 23.4 (67) 6.67 (66) 8077.1 (65)
 $\angle C = 79^\circ 3'$ (71) $1 : 3.65$. $\angle$ (70) $458.9 , 4077.6$ (69)
 22.01 (74) $53.16 , 9.9$ (73) $47.31 , 8.11$ (72)
 $AD = 2.4$ (77) 59.19 (76) 118.39 . $\angle$ 4.88 . $\angle$ (75)
 $BO = 7.06$, $OD = 2.18$, $AO = 2.17$. $\angle$ $BE = 7.73$, $AD = 4.35$. $\angle$ (78)
 $OE = 0.67$

7. הפונקציות טנגנס וקוטנגנס.

7.1 טנגנס של זווית חדה, במשולש ישר-זווית מוגדר כיחס בין הניצב שמול הזווית, לניצב שליד הזווית. סימונו: $\tan \alpha$ או $\tan \alpha$.



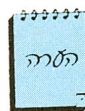
$$\tan \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית } \alpha}{\text{הניצב שליד הזווית } \alpha}$$

$$\tan \alpha = a/b \quad \text{או}$$

7.2 קוטנגנס של זווית חדה במשולש ישר-זווית מוגדר כיחס בין הניצב שליד הזווית, לניצב שמול הזווית. סימונו המקוצר: $\cot \alpha$.

$$\cot \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית } \alpha}{\text{הניצב שמול הזווית } \alpha} \quad \text{או} \quad \cot \alpha = a/b$$

להבדיל מפונקציות הסינוס והקוסינוס, שערכיהן מוגבלים (קטנים מיחידה אחת), אין הגבלה לערכי הטנגנס והקוטנגנס של זווית.



7.3 מהגדרת הפונקציות הללו מתקבלות המסקנות הבאות:

מסקנות

א. $\tan \alpha = \cot (90^\circ - \alpha)$

נימוק: $\tan \alpha = \cot \beta$, כי שתייהן מוגדרות ע"י אותו היחס;

כמו כן α ו- β משלימות זו את זו ל- 90° .

ב. $\cot \alpha = 1/\tan \alpha$ נימוק: $1/\tan \alpha = 1 : a/b = b/a = \cot \alpha$

8. שיטת עבודה

8.1 שימושים

ניתן לנצל את ה- tg וה- cot , לפתרון משולשים ישרי-זווית, במקרים הבאים:

א. אם נתון ניצב וזווית חדה, ניתן לחשב את הניצב האחר בשתי דרכים:

- ע"י הכפלת הניצב הנתון בטנגנס הזווית שלידו $a = b \text{tg}\alpha$

- ע"י המנה בין הניצב הנתון לטנגנס הזווית שמולו $a = b / \text{tg}\beta$

ב. אם נתונים שני הניצבים, ניתן לחשב את הזוויות החדות של המשולש:

$$\text{tg}\beta = b/a, \text{tg}\alpha = a/b$$

ניתן להיעזר גם בקוטנגנס לפתרון משולשים, אך השימוש בה, בעזרת מחשבון פחות נוח.

8.2 חישובים בסיוע מחשבון

השימוש במחשבון, לפונקצית הטנגנס זהה לנוהל לגבי הסינוס והקוסינוס.

פונקצית הקוטנגנס אינה מופיעה על מקשי המחשבון. כדי לחשב את ערכה

משתמשים באחת מהמסקנות שהתקבלו בסעיף 7.3

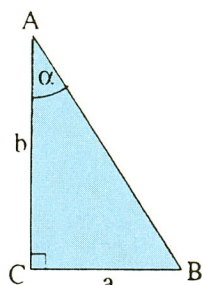
מחשבים את הטנגנס, ואז בעזרת המקש $1/x$ מתקבל הקוטנגנס של אותה זווית;

או מחשבים את טנגנס הזווית המשלימה את הנתונה ל- 90° .

8.3 דוגמאות

דוגמה א

במשולש ישר-זווית, שווה b ל- 7.2 ס"מ והזווית α שלידו היא בת $66^\circ 5'$. חשב את שטח המשולש.



פתרון

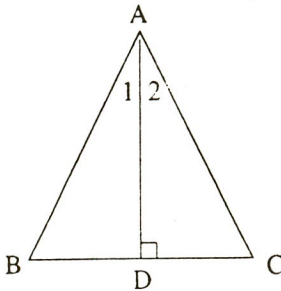
$$\text{tg}\alpha = a/b \Rightarrow a = b \text{tg}\alpha$$

$$a = 7.2 \cdot \text{tg}66^\circ 5' = 16.2 \text{ ס"מ}$$

$$\text{השטח: } S = 1/2 ab = 58.4 \text{ ס"מ}^2$$

דוגמה ב

במשולש שוויוש ABC ($AB = AC$) נתון: $a = 47.8$ ס"מ. התיכון לבסיס שווה ל- 58.13 ס"מ. חשב את זווית הראש של המשולש.



פירוק

לפי תכונות משוויש:

$$BD = BC : 2 = 23.9$$

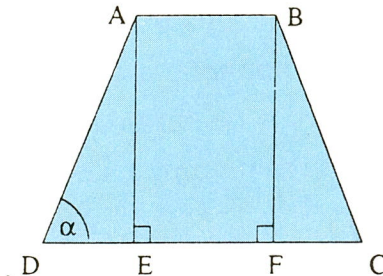
$$\operatorname{tg} A_1 = BD/AD = 23.9/58.13$$

$$\angle A_1 = 22.35^\circ \quad \leftarrow$$

$$\angle A = 2\angle A_1 = 44.70^\circ = 44^\circ 42' \quad \leftarrow$$

דוגמה ג

בטרפז שוויוש, ארך הבסיסים 12 ס"מ ו- 17 ס"מ. הזווית החדה $\alpha = 58^\circ 10'$. חשב את שטח הטרפז.



פירוק

נוריד גבהים AE ו- BF.

מתקבל: מלבן ABFE

ו- $\triangle BFC \cong \triangle ADE$.

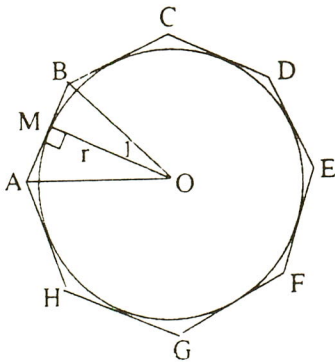
$$DE = FC = \frac{DC - EF}{2} = \frac{17 - 12}{2} = 2.5 \quad \leftarrow$$

במשולש ADE $\operatorname{tg} \alpha = AE/DE$

$$AE = DE \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2.5 \cdot \operatorname{tg} 58^\circ 10' = 4 \text{ ס"מ}$$

$$S = 1/2 (AB + CD) \cdot AE = 58 \text{ סמ"ר}$$

מתומן משוכלל (מצולע בעל שמונה צלעות) חוסם מעגל, שמחוגו 10.5 ס"מ. חשב את היקף המצולע - P.



פתרון

מרכז המעגל החוסם מצולע משוכלל,

ומרכז המעגל החוסם בו מתלכדים. לכן:

$$\angle AOB = 360^\circ/8 = 45^\circ \Rightarrow \angle O_1 = 22.5^\circ$$

במשולש MBO שהוא ישר-זווית:

$$\operatorname{tg} O_1 = MB/MO$$

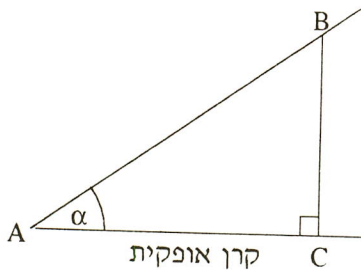
$$MB = MO \operatorname{tg} O_1 = 10.5 \cdot \operatorname{tg} 22.5^\circ = 4.3 \text{ ס"מ} \quad \leftarrow$$

הקטע MB הוא מחצית הצלע AB

$$AB = 2 \cdot MB \Rightarrow P = 8 \cdot 2MB = 16MB = 68.8 \text{ ס"מ}$$

9. זווית גובה, זווית עומק, זווית ראייה.

בסעיף זה נכיר מספר זוויות, המופיעות בפתרון בעיות מעשיות רבות. אלה זוויות המתייחסות לראיית נקודות או קטעים, כשעין המסתכל היא נקודת התצפית.



9.1 זווית גובה, זווית עומק

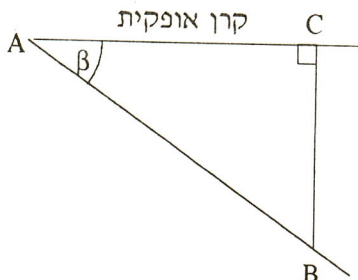
זווית הנוצרת בין שתי קרניים

היוצאות מנקודת תצפית (A):

- האחת אופקית (AC).

- השניה עוברת דרך הנקודה

שעליה צופים (B) - הקרן AB.

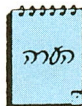


אם הנקודה שעליה צופים נמצאת מעל נקודת

התצפית, נקראת הזווית α זווית גובה.

אם היא נמצאת מתחת לנקודת התצפית

היא (β) נקראת זווית עומק.



אם בבעיה לא מציינים את גובה נקודת התצפית מעל המישור האופקי, יש להתייחס כאילו נקודת התצפית נמצאת על המישור האופקי.

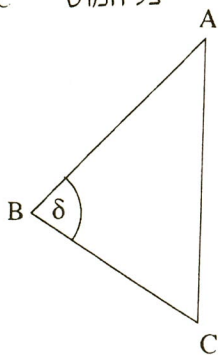
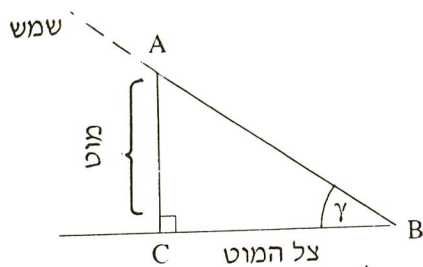
9.2 גובה השמש הוא דוגמה מעשית של זווית גובה.

זווית זו נמדדת במשולש ישר-זווית, שבו ניצב אחד הוא קטע אנכי למישור האופקי - הקטע AC;

הניצב השני הוא צילו של הקטע

הני"ל על המישור האופקי - הקטע BC.

הזווית γ מגדירה את גובה השמש.



9.3 זווית ראייה של קטע נתון,

מנקודה נתונה היא הזווית הנוצרת

בין הקטעים המחברים את נקודת

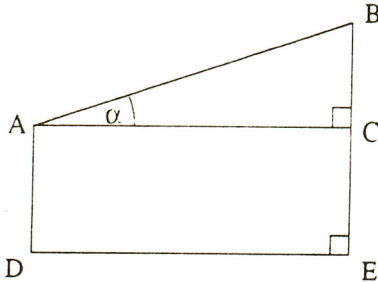
התצפית, עם קצות הקטע הנתון.

הזווית δ היא זווית ראייה של

הקטע AC מהנקודה B.

דוגמה א

תלמיד רואה את המורה העומד ליד הלוח, בזווית גובה של $5^{\circ}22'$. בכמה גובה המורה מהתלמיד אם המרחק ביניהם הוא 4.5 מ.



פתרון

התלמיד, גובהו AD , המורה,

הנמצא על יד הלוח, גובהו BE .

המרחק ביניהם: $DE = 4.5$ מ

משרטטים $AC \parallel DE$, ולכן:

$\angle C = 90^{\circ}$, $\angle A = 5^{\circ}22'$.

BC הפרש הגבהים של המורה והתלמיד.

$$\operatorname{tg} \alpha = BC/AC$$

$$BC = AC \operatorname{tg} \alpha = 4.5 \operatorname{tg} 5^{\circ}22' = 0.42 \text{ מ'}$$

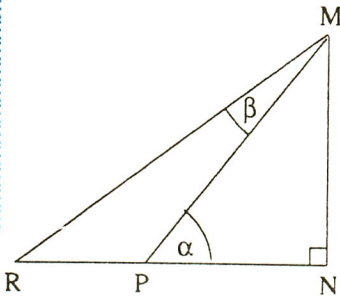
דוגמה ב

גובהו של עמוד חשמל MN הוא 10.5 מ. אורכו של צל העמוד PN בשעת המדידה

הוא 12.8 מ. העמוד מחוזק לקרקע ע"י כבל MR , ונתון: $PR = 5.2$ מ. חשב:

א. את גובה השמש בשעת המדידה.

ב. את זווית הראייה של PR מהנקודה M .



פתרון

א. גובה השמש היא הזווית MPN (α).

$$\operatorname{tg} \alpha = MN/PN = 10.5/12.8$$

$$\alpha = 39^{\circ}21' \leftarrow$$

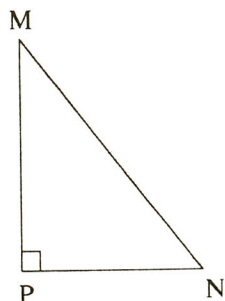
ב. זווית הראייה של PR מהנקודה M היא $\angle PMR$ (β).

$$\operatorname{tg} R = MN/NR = 10.5 / (12.8 + 5.2) = 10.5/18 \quad \text{במשולש } MRN$$

$$\Rightarrow \angle R = 30^{\circ}15'$$

$$\beta = \alpha - \angle R = 39^{\circ}21' - 30^{\circ}15' = 9^{\circ}6' \quad \text{לכן:}$$

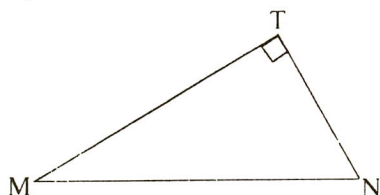
תרגילים



1. במשולש MNP $\angle P = 90^\circ$.

כתוב יחס המבטא:

- א. tgM , ב. tgN , ג. $ctgM$, ד. $ctgN$.



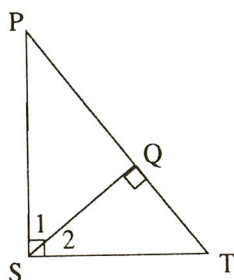
2. במשולש MTN $\angle T = 90^\circ$.

ציין את הפונקציות

הטריגונומטריות המבוטאות

ע"י היחסים

- א. MT/TN , ב. TN/MT .



3. משולש PST ישר-זווית.

SQ הוא הגובה ליתר PT .

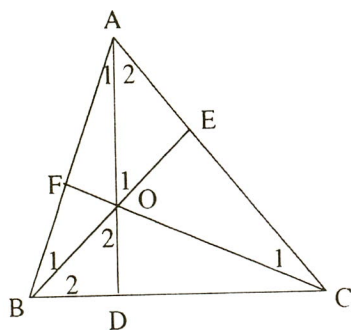
כתוב יחסים המבטאים:

- א. tgS_1 , ב. $ctgT$, ג. tgP , ד. $ctgS_2$.

4. AD הוא גובה לבסיס BC של משולש ABC . ציין פונקציות

טריגונומטריות המבוטאות באמצעות היחסים:

- א. AD/DB , ב. DC/AD .



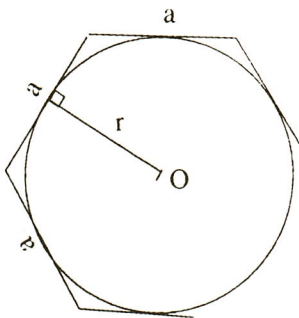
5. O - נקודת המפגש של גבהי

המשולש ABC .

ציין יחס המבטא את

הפונקציה הטריגונומטרית:

- א. tgC_1 , ב. $ctgO_2$.



6. המעגל O חסום במצולע משוכלל, בעל n צלעות. בטא את היחס בין צלע המצולע ורדיוס המעגל החסום, ע"י פונקציה טריגונומטרית של זווית מרכזית.

7. הבע את הפונקציות הבאות, באמצעות פונקציות טריגונומטריות של זוויות אחרות (למשל: $\text{tg } 40^\circ = \text{ctg } 50^\circ$).

$$\text{ctg } 48.7^\circ, \text{ctg } 33^\circ 20', \text{tg } 45^\circ, \text{ctg } 35^\circ, \text{tg } 42^\circ$$

8. השתמש במחשבון ובדוק את השוויונים הבאים:

$$\begin{aligned} \text{tg } 39^\circ &= 0.8098, \quad \text{tg } 72^\circ 20' = 3.1397, \\ \text{ctg } 48^\circ &= \text{tg } (90^\circ - 48^\circ) = \text{tg } 42^\circ = 0.9004, \\ \text{ctg } 48^\circ &= 1 : \text{tg } 48^\circ = 1 : 1.106 = 0.9004, \\ \text{ctg } 54' &= 1 : \text{tg } 0^\circ 54' = 1 : 0.0157 = 63.66, \end{aligned}$$

9. מצא בעזרת מחשבון את הערך של:

$$\begin{aligned} \text{tg } 27^\circ 45', \quad \text{tg } 33.5^\circ, \quad \text{tg } 2^\circ 2', \\ \text{ctg } 2^\circ 13', \quad \text{ctg } 48.4^\circ, \quad \text{ctg } 45^\circ \end{aligned}$$

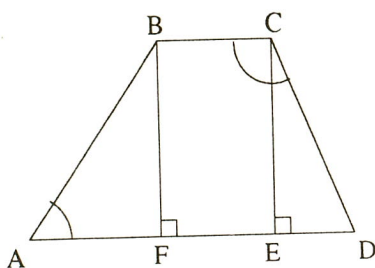
10. העזר במחשבון והראה כי, אם נתון:

$$\begin{aligned} \text{א. } A &= 66.9^\circ = 66^\circ 45', & \text{אז } \text{tg } A &= 2.345 \\ \text{ב. } A &= 60^\circ, & \text{אז } \text{tg } A &= \sqrt{3} \\ \text{ג. } \text{tg } A &= 1 : 0.325 = 3.0769, & \text{אז } \text{ctg } A &= 0.325 \\ A &= 71^\circ 59', & \leftarrow \end{aligned}$$

11. שרטט זווית בת 45° והורד - מנקודה כלשהיא על שוקה האחת - אנך לשוק השניה. חשב את הערך של $\text{ctg } 45^\circ$ ו- $\text{tg } 45^\circ$.

12. מצא בעזרת מחשבון את הזווית A , אם נתון :
- א. $tgA = 3.47$ ג. $tgA = 2/7$
- ב. $ctgA = 1.123$ ד. $ctgA = \sqrt{3}/3$
13. במשולש ABC נתון : $\angle C = 90^\circ$, 17 ס"מ b , $\angle A = 85^\circ$. חשב את הניצב a .
14. במשולש ישר-זווית, כני"ל, נתון : 8.5 ס"מ a , $\angle B = 52.6^\circ$. חשב את הניצב b .
15. במשולש ישר-זווית ABC , נתון ניצב 22.3 ס"מ a וזווית $\angle A = 55^\circ$. חשב את הניצב b .
16. הזווית C במשולש ABC היא ישרה, ונתון : 8.6 ס"מ a , 6.2 ס"מ b . חשב את זוויות המשולש.
17. שטח המשולש ABC ($\angle C = 90^\circ$) הוא 252 סמ"ר. 18 ס"מ AC . חשב את הניצב BC ואת הזווית B .
18. במשולש שוו"ש ABC , נתון הבסיס 32.7 ס"מ BC וזווית הראש $\angle A = 47^\circ$. חשב את הגובה לבסיס.
19. במשולש כני"ל נתון : 25.4 ס"מ BC , $\angle B = 55^\circ 35'$. חשב את AD .
20. במשולש שוו"ש ABC ($AB = AC$), נתון : 28.5 ס"מ BC , הגובה לבסיס 25 ס"מ AD . חשב את זוויות המשולש.
21. שטחו של משולש שוו"ש 405 ס"מ. בסיס המשולש - 38 ס"מ. חשב את זוויות המשולש.
22. במשולש שוו"ש ABC ($AB = AC$) BD - הגובה לשוק ונתון $\angle A = 47^\circ 6'$, 13.1 ס"מ BD . חשב את הקטעים AD ו- DC .

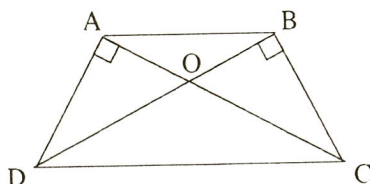
23. במלבן ABCD נתון $AB = 38$ ס"מ, $AD = 26.4$ ס"מ.
חשב את זוויות שיוצר אלכסון המלבן עם צלעותיו.
24. במלבן ABCD נתון $AB = 13.5$ ס"מ, $BC = 8.8$ ס"מ.
חשב את הזווית הנוצרת בין אלכסוניו.
25. במלבן ABCD שווה הצלע הקצרה ל- 9.5 ס"מ.
הזווית בין האלכסונים בת $75^\circ 2'$. חשב את הצלע הארוכה.
26. אלכסוני מעוין ABCD הם $BD = 52$ ס"מ, $AC = 39.2$ ס"מ.
חשב את זוויות המעוין.
27. שטחו של מעוין ABCD הוא 407 סמ"ר. אחד האלכסונים $BD = 56$ ס"מ.
חשב את זוויות המעוין.
28. האלכסון הקצר של המעוין הוא 42 ס"מ k וזוויתו הקהה $\alpha = 110^\circ 6'$.
חשב את האלכסון הארוך.
29. בדלתון ABCD שתי זוויות ישרות: B ו- C. $BC = 23$ ס"מ, $\angle D = 67^\circ 36'$.
חשב את AD.
30. בטרפז ABCD, נתון: $\angle A = \angle D = 90^\circ$, $AD = 2.7$ ס"מ, $CD = 3.6$ ס"מ,
 $AB = 2.4$ ס"מ. חשב את הזווית B.
31. בטרפז ישר-זווית כנ"ל נתון: $\angle C = 42^\circ 12'$, $AD = 8.9$ ס"מ,
 $AB = 12.1$ ס"מ. חשב את CD.
32. בטרפז ישר-זווית כנ"ל, נתון: $\angle B = 104^\circ$, $AB = 2.25$ ס"מ, $CD = 3$ ס"מ.
חשב את שטח הטרפז.



33. בטרפז ABCD נתון:
 $CE \perp AD$, $BF \perp AD$
 $AF = 8$ ס"מ, $\angle A = 42^\circ 20'$, $\angle BCD = 106.2^\circ$.
 חשב את DE.

34. התייחס לשרטוט שבתרגיל הקודם. נתון $BC = 5.6$ ס"מ, $\angle ABC = 130^\circ 8'$, $AE = 13$ ס"מ, $\angle D = 33^\circ$. חשב את שטח הטרפז.

35. בטרפז שוו"ש נתונים הבסיסים: $a = 12.5$ ס"מ, $b = 17.5$ ס"מ, וזווית $\alpha = 47^\circ$. חשב את גובה הטרפז ואת שטחו.



36. בטרפז שוו"ש, האלכסונים מאונכים לשוקי הטרפז.
 $\angle ADC = 57^\circ$, $BC = 32$ ס"מ.
 חשב את AC ו-CD.

37. אלכסונו של טרפז שוו"ש מאונכים לשוקיו. הפרש הבסיסים - 8 ס"מ, אחת מזוויותיו - $51^\circ 23'$. חשב את גובה הטרפז ואת אלכסונו.

38. חשב את קטע האמצעים בטרפז, שבבעיה הקודמת, בלי לחשב את אורכי הבסיסים. העזר בתוצאה שקיבלת וחשב את שטח הטרפז.

39. במשולש שוו"ש ABC ($AB = AC$) נתון: $AB = 30$ ס"מ, $BC = 19$ ס"מ. חשב את הזווית B ואת רדיוס המעגל החסום במשולש.

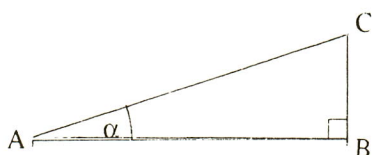
40. בטרפז שוו"ש, אורכי הבסיסים 25 ס"מ ו-16 ס"מ. הזווית בין המשכי שוקי הטרפז 95° . חשב את שטח הטרפז.

41. בטרפז שוו"ש נתונים הבסיסים a ו-b ($a < b$), והזווית החדה α . הוכח, כי שטח הטרפז שווה ל: $(b^2 - a^2) \operatorname{tg} \alpha / 4$.

42. במצולע משוכלל בעל n צלעות חסום מעגל, בעל רדיוס r .
הוכח, כי שטח המצולע שווה ל: $nr^2 \operatorname{tg} (180^\circ/n)$

זווית גובה, זווית עומק, זווית ראייה.

43. נער הנמצא בקצה של מגרש כדורסל רואה את הסל, הנמצא בקצה האחר של



המגרש בזווית גובה $\alpha = 6^\circ 10'$.

גובה הסל: $BC = 2.7$ מ'.

חשב את אורך המגרש AB .

44. ילד רואה פנס רחוב, הנמצא במרחק 8.5 מ' ממנו, בזווית גובה של 35° . חשב מהו גובה הפנס, בלי להתייחס לגובה הילד.

45. פתור את הבעיה הקודמת תוך התייחסות לגובה הילד, שהוא 1.35 מ'.

46. אדם, שגר בקומה ראשונה רואה את ידידו, הגר בקומה הרביעית, בבנין ממול, בזווית גובה של 42° . מהו המרחק בין שני הבנינים, אם ידוע, שגובה כל קומה הוא 3 מ'.

47. תייר נמצא במרחק 20 מ' מפסל, שגובהו 2.7 מ'.
באיזו זווית רואה התייר את ראש הפסל?

48. קבוצת תלמידים, שהגיעו לראש הר רואים את חבריהם, שנשארו מאחור, 300 מ' בזווית עומק של 47° . מהו ההבדל בין הגבהים, שבהם נמצאות הקבוצות?

49. מנקה חלונות, הנמצא בקומה החמישית של בנין (בגובה 17 מ') מסתכל על מכונית, החונה במרחק 25 מ' מבסיס הבנין. באיזו זווית עומק הוא רואה את המכונית?

50. מהו אורך צילו של עמוד, שגובהו 5.5 מ', כאשר גובה השמש הוא 32° ?

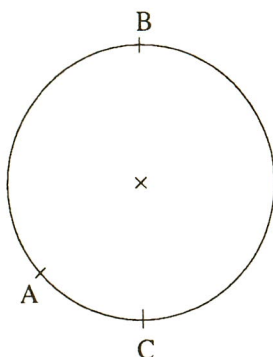
51. באיזה גובה צריכה להיות השמש, כדי שאדם, שגובהו 1.65 מ' יוכל לנוח בצילו של עץ שגובהו 9.5 מ'?

52. אורך צילה של אנדרטה, בשעה מסויימת מהווה שליש מגובה האנדרטה. מהו גובה השמש באותה שעה?

53. אדם הנמצא במרחק 32 מ' מבנין רואה את גג הבנין, בזווית גובה של 47° . הוא מתקרב לבנין ומהנקודה החדשה רואה את הגג בזווית גובה של $67^\circ 22'$. בכמה מטרים התקרב האדם לבנין?

54. כאשר גובה השמש הוא 65° , שווה צילו של עמוד ל- 2.6 מ'. לאחר זמן מה קטן הצל ב- 1.1 מ'. מהו גובה השמש בפעם השניה?

55. מנקודת תצפית על ראש ההר רואים את הרכבל, העולה על כבל שאורכו 750 מ', בזווית עומק של $26^\circ 15'$. מה גובה נקודת התצפית מעל תחנת ההתחלה של הרכבל?



56. אייל נמצא בכסא A, שבגלגל הענק. אבי נמצא בכסא הגבוה ביותר B, ואלון בכסא הנמוך ביותר C. המרחקים בין הילדים הם: $AB = 3$ מ', $AC = 2.1$ מ'. באילו זוויות רואה אייל את חבריו?

57. ביום העצמאות העמידו במה בגובה של 2.5 מ'. באיזו זווית נראה זמר, שגובהו 1.78 מ' ע"י צופים, ממרחק 12 מ' ? התעלם מגובה הצופים.

58. גלית, היושבת בשורה האחרונה ביציע, רואה נקודה על מסך הקולנוע, בזווית עומק של $4^\circ 15'$. ארז, היושב בשורה האחרונה באולם (על הישר המחבר את הנקודה על המסך עם הכסא של גלית - במבט מלמעלה) רואה אותה נקודה, בזווית גובה של 5° .

מה הפרש הגובה בין שני הכסאות, אם אורך האולם 52 מ' ?

59. ממטוס, הטס בגובה 420 מ', רואים תחנת רכבת, בזווית עומק של $8^{\circ}42'$.
תוך כמה שניות יעבור המטוס מעל התחנה, אם מהירותו 560 מ' לשניה?

60. ממטוס, הטס בגובה 380 מ', רואים את מגדל הפיקוח, בזווית עומק של $9^{\circ}20'$.
לאחר 3 שניות, רואים את המגדל בזווית עומק של $7^{\circ}30'$. מהי מהירות המטוס?



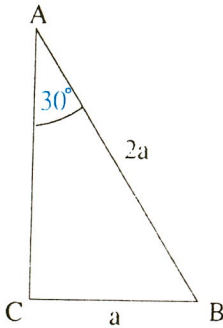
תשובות

$\text{tg } S1 = PQ/QS, \text{ctg } S2 = SQ/QT$ (3)	$PN/PM, PM/PN, PM/PN, PN/PM$ (1)
$a/r = 2\text{tg}(180^\circ/n)$ (6)	$\text{tg } C1 = OE/CE = AF/CF, \text{ctg } O2 = OD/BD$ (5)
$\text{tg } 45^\circ = \text{ctg } 45^\circ = 1$ (11)	$\text{ctg } 45^\circ = 76.39$ (9) $\text{ctg } 48.7^\circ = \text{tg } 41.3^\circ$ (7)
11.12 (14)	194.3 (13) $73^\circ55', 41^\circ41', 15^\circ56', 60^\circ$ (12)
37.6 (18)	$32^\circ44', BC = 28$ (17) $\angle A = 54^\circ13'$ (16) 15.61 (15)
$48^\circ17', 83^\circ25'$ (21)	$60^\circ19', 59^\circ22'$ (20) 18.53 (19)
$66^\circ12'$ (24)	$55^\circ13', 34^\circ47'$ (23) $CD = 5.7, AD = 12.17$ (22)
60.09 (28)	$150^\circ54', 29^\circ6'$ (27) $105^\circ59', 74^\circ1'$ (26) 12.37 (25)
7.89 (32)	21.91 (31) $113^\circ58'$ (30) 24.87 (29)
$S = 40.2, h = 2.68$ (35)	140.95 (34) 2.12 (33)
31.41 (38)	$8.02, 5.01$ (37) 58.75 ב. 49.28 א. (36)
5.95 (44)	24.98 (43) 84.53 (40) $6.84, 71^\circ32'$ (39)
$34^\circ13'$ (49)	$7^\circ41'$ (47) 10 (46) 7.3 (45)
17.69 (53)	$71^\circ34'$ (52) $80^\circ8'$ (51) 8.8 (50)
$7^\circ51'$ (57)	$35^\circ, 55^\circ$ (56) 331.7 (55) $74^\circ56'$ (54)
	192 (60) 8.4 (58)

10. פונקציות טריגונומטריות של זוויות מיוחדות

ערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מסוימות ניתנים לחישוב בעזרת משפטים מהנדסת המישור.

10.1 $\alpha = 30^\circ$



נתייחס למשולש ABC, שבו: $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$.

$$AB = 2BC = 2a \quad \leftarrow \quad BC = a \quad \text{נניח:}$$

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 \quad \leftarrow$$

$$AC = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3} \quad \text{או}$$

$$\sin 30^\circ = BC/AB = a / 2a = 1/2 \quad \text{לכן:}$$

$$\cos 30^\circ = AC/AB = a\sqrt{3} / 2a = \sqrt{3} / 2$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3}/3 \quad \text{באותו אופן מתקבל:}$$

$$\operatorname{cot} 30^\circ = \sqrt{3} \quad \text{וכן,}$$

10.2 $\alpha = 60^\circ$

את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זווית בת 60° אפשר לקבל באמצעות הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות משלימות ל- 90° :

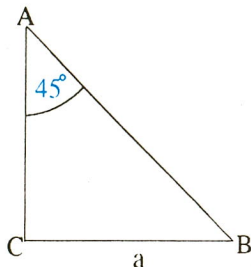
$$\sin 60^\circ = \cos (90^\circ - 60^\circ) = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$$

$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = 1/2$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3}/3$$

10.3 $\alpha = 45^\circ$



נתייחס למשולש ABC, שבו: $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 90^\circ$.

$$AC = a \quad \leftarrow \quad BC = a \quad \text{נניח:}$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2a^2 \quad \leftarrow$$

$$AB = a\sqrt{2} \quad \leftarrow$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = a/(a\sqrt{2}) = \sqrt{2}/2 \quad \text{לכן:}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = a/a = 1$$

10.4 נסכם את התוצאות, שהתקבלו, בטבלה הבאה :

	30°	45°	60°
sin	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2
tg	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$

אמנם, ניתן לקבל את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות של הזוויות הנ"ל גם בעזרת מחשבון, אך הערכים שבטבלה הם לרוב, יותר נוחים לפתרון בעיות.



11. קשרים בין פונקציות טריגונומטריות של אותה זווית

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad 11.1$$

ה/כ"ה

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= \\ &= (a/c)^2 + (b/c)^2 = a^2/c^2 + b^2/c^2 = \\ &\text{לפי משפט פיתגורס :} \\ &= (a^2 + b^2) / c^2 = c^2/c^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{ctg} \alpha = 1/\text{tg} \alpha \quad \text{או} \quad \text{tg} \alpha \cdot \text{ctg} \alpha = 1 \quad 11.2$$

את הקשרים האלה הכרנו בסעיף 7.3 ב'

$$\text{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad 11.3$$

ה/כ"ה

$$\sin \alpha / \cos \alpha = a/c : b/c = a/c \cdot c/b = a/b = \text{tg} \alpha$$

$$11.4 \quad \text{ctg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \text{הוכח!}$$

$$11.5 \quad 1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

ה/כחה

נשתמש ב- 11.3 וב- 11.1 לפי הסדר

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$11.6 \quad 1 + \text{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad \text{הוכח!}$$

12. שימושים

לזהויות היסודיות הנ"ל שימושים בשלושה תחומים:

- א. חישוב ערך הפונקציות הטריגונומטריות כאשר נתון ערכה של אחרת, בלי לחשב את הזווית.
- ב. הוכחת זהויות.
- ג. פישוט ביטויים טריגונומטריים מורכבים.

12.1 נציג את שימוש א' בעזרת הדוגמאות הבאות :

דוגמה א

נתון : $\sin \alpha = 0.6$. חשב את ערכי יתר הפונקציות הטריגונומטריות של α .

לצורך התחלת הפתרון בוחרים זהות, המקשרת בין $\sin \alpha$ בין פונקציה נוספת אחת בלבד.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{למשל,}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - 0.6^2 = 1 - 0.36 = 0.64$$

$$\cos \alpha = 0.8$$

שימוש בנוסחה 11.3 נותן :

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha = 0.6 / 0.8 = 0.75$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = 1 / \operatorname{tg} \alpha = 1 / 0.75 = 1.3 \quad \text{ולפי 11.2 :}$$

מ.ש.ל.

דוגמה ב

נתון $\operatorname{ctg} \alpha = 0.5$. חשב את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות האחרות של α .

פתרון
לפי 11.6 :

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + 0.5^2 = 1.25 = 5/4$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = 4/5 \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - 4/5 = 1/5 \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{ולפי 11.1 :}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 / \operatorname{ctg} \alpha = 1 / 0.5 = 2 \quad \text{ולפי 11.2 :}$$

12.2 הוכחת זהויות - שיטת עבודה

ניתן לפתח זהות באחת משתי השיטות הבאות :

- לפתח אחד משני אגפי הזהות, עד שמתקבל הביטוי הרשום באגף השני ;
 - לפתח כל אחד מאגפי הזהות בנפרד, בלי לכתוב סימן שוויון ביניהם ;
- אם מתקבל בשני המקרים אותו הביטוי, הביטויים שפותחו שווים זה לזה.

דוגמה א

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \quad \text{הוכח את הזהות:}$$

פתרון

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) + \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \quad \text{נפתח את האגף השמאלי:}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

מ.ש.ל.

דוגמה ב

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \text{הוכח את הזהות:}$$

הוכחה

נפתח את האגף הימני, ע"י הכפלת המונה והמכנה באותו ביטוי:

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

מ.ש.ל.

12.3 ביטויים שקולים

הזהויות היסודיות מאפשרות לפשט ביטויים טריגונומטריים.

למשל, אם בסיום פתרון מתקבל: $(a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + a^2) \sin^2 \alpha =$ אפשר לפתח את הביטוי ולקבל:

$$= a^2 (\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1) \sin^2 \alpha = a^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha = a^2$$

13. פתרון בעיות בצורה כללית.

בדומה לבעיות באלגברה, גם בטריגונומטריה ניתן לפתור בעיות בצורה כללית.

במקרה זה, התוצאה היא ביטוי, שבו האותיות מציינות צלעות ופונקציות

טריגונומטריות של זוויות.

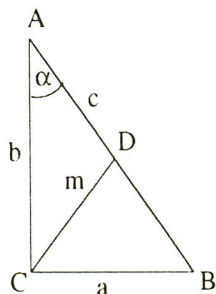
הגישה לפתרון בעיות אלו, זהה לזו שבפתרון בעיות עם ערכים מספריים, אלא

שבכל שלב של הפתרון, יש לבדוק אם הגודל המבוקש מבוטא באמצעות גדלים

נתונים בלבד.

דוגמה א

במשולש ישר זווית נתון התיכון ליתר m וזווית חדה α .
בטא באמצעות m ו- α את ניצבי המשולש ואת שטחו.



פתרון

במשולש ישר זווית, התיכון ליתר שווה למחצית היתר.
לכן, $c = 2m$.
נחשב את הניצבים:

$$a = c \sin \alpha = 2m \sin \alpha$$

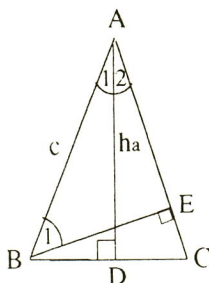
$$b = c \cos \alpha = 2m \cos \alpha$$

והשטח:

$$S = 0.5 ab = 0.5 \cdot 2m \sin \alpha \cdot 2m \cos \alpha = 2m^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

דוגמה ב

במשולש שווש ABC, נתון הגובה לבסיס h_a , וזווית הראש α . בטא באמצעותם:
א. את שוק המשולש
ב. את הגובה עליה



פתרון

במשולש ABD: $\angle A_1 = \alpha/2$

$$\cos \alpha/2 = AD/AB = h_a/c$$

$$c = \frac{h_a}{\cos \alpha/2}, \text{ ואז,}$$

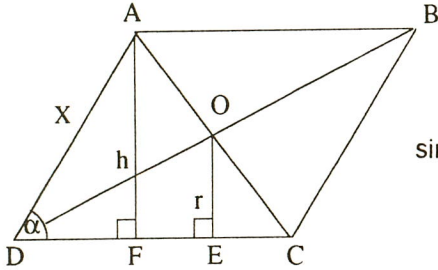
במשולש ABE: $\sin \alpha = BE/AB = BE/c$

$$BE = c \sin \alpha = \frac{h_a \sin \alpha}{\cos \alpha/2} \quad \text{מכאן}$$

דוגמה ג

במעוין נתונה זווית חדה α . ורדיוס המעגל החסום בו r . בטא באמצעותם את צלע המעוין ואת שטחו.

פתרון



מרכז המעגל החסום במעוין נמצא בנקודת המפגש של האלכסונים

לכן: $h = 2r$

במשולש ADF: $\sin \alpha = AF/AD = 2r/x$

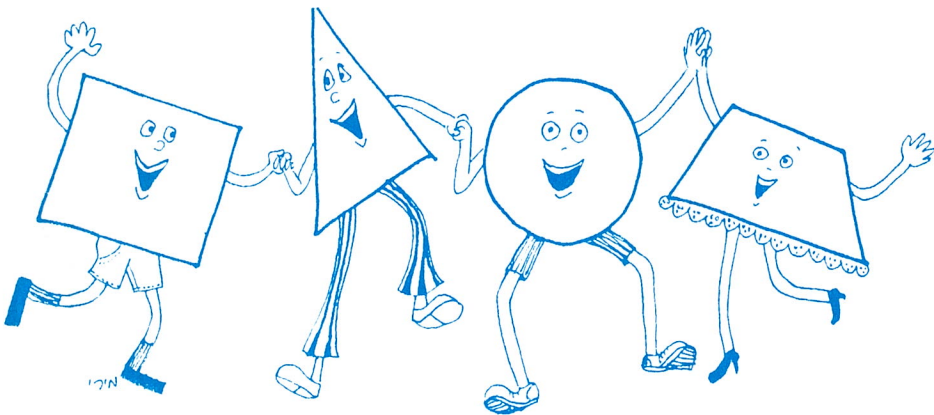
$$x = \frac{2r}{\sin \alpha} \quad \leftarrow$$

שטח המעוין:

$$S = DC \cdot AF = \frac{2r}{\sin \alpha} \cdot 2r = \frac{4r^2}{\sin \alpha}$$

שים לב!

חלק גדול מהבעיות ניתן לפתור בשתי דרכים ויותר. לעיתים, הביטויים המתקבלים בדרכים שונות שונים זה מזה, ולמרות זאת שניהם נכונים. לרוב, ניתן לפתח ביטוי אחד עד שמתקבל הביטוי האחר, ע"י שימוש בזהויות טריגונומטריות. אולם, הזהויות שהיכרנו, אין בהן די כדי להועיל בכל המקרים.



תרגילים

1. חשב את ערכי הביטויים הבאים, בלי שימוש במחשבון :

א. $\sin 45^\circ \cos 45^\circ + \operatorname{tg}^2 60^\circ$

ב. $\operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$

ג. $\operatorname{tg} 60^\circ \cos 30^\circ - \sin^2 45^\circ$

ד. $\frac{\cos 30^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ} + \cos^2 45^\circ$

ה. $3\operatorname{tg} 30^\circ + 4\operatorname{tg} 60^\circ - 2\sin 60^\circ$

ו. $3\operatorname{ctg}^2 30^\circ + 2\sin^2 45^\circ - 2\sin 30^\circ$

2. חשב את הזווית החדה A, המקיימת :

א. $\sin A = 1/2$ ז. $\sin 3A = \sqrt{2}/2$

ב. $\cos A = \sqrt{3}/2$ ח. $\operatorname{ctg} (A + 40^\circ) = \sqrt{3}/3$

ג. $\operatorname{tg} A = \sqrt{3}/3$ ט. $\cos (2A - 10^\circ) = 1/2$

ד. $\operatorname{ctg} A = 1$ י. $\operatorname{tg}^2 (A - 15^\circ) = 1/3$

ה. $\cos A = \sqrt{2}/2$ יא. $\sin A = \cos A$

ו. $\operatorname{tg}^2 A = 3$ יב. $\operatorname{tg} A = \operatorname{ctg} A$

3. נתון $\sin A = 15/17$. מצא את ערכי $\cos A$, $\operatorname{tg} A$ ו- $\operatorname{ctg} A$, בלי למצוא את גודל הזווית A.

4. בעיה כניל כאשר : א. $\sin A = 0.28$ ב. $\sin A = 5/13$

5. נתון $\cos A = 40/41$. חשב את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות האחרות של A.

6. בעיה כניל, כאשר : א. $\cos A = 1/3$ ב. $\cos A = 0.8$

7. חשב את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות האחרות של A כאשר נתון :

א. $\operatorname{tg} A = 1 \frac{1}{3}$ ב. $\operatorname{tg} A = 4 \frac{4}{9}$ ג. $\operatorname{tg} A = 2.4$

8. חשב את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות של A, כאשר נתון :

א. $\operatorname{ctg} A = 0.225$ ב. $\operatorname{ctg} A = 2 \frac{2}{5}$

9. במשולש ישר זווית קטן הניצב a פי 4 מהניצב b . מצא את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות של הזווית המונחת מול הניצב a .

10. הוכח את קיום הזהויות הבאות :

א. $\cos A \cdot \sin (90^\circ - A) + \sin A \cdot \cos (90^\circ - A) = 1$

ב. $\sin^2 A + \sin^2 (90^\circ - A) = 1$

ג. $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} (90^\circ - A) = 1$

ד. $\operatorname{tg} (45^\circ + A) = \operatorname{ctg} (45^\circ - A)$

ה. $(\sin A + \cos A)^2 - 1 = 2\sin A \cdot \cos A$

ו. $1 + \cot^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}$

ז. $\cos (90^\circ - A) \operatorname{ctg} A = \cos A$

ח. $\sin A \cdot \operatorname{tg} (90^\circ - A) = \cos A$

ט. $(1 + \operatorname{tg}^2 A) \cdot \sin^2 A = \operatorname{tg}^2 A$

י. $(1 + \operatorname{ctg}^2 A) (1 - \cos^2 A) = 1$

יא. $\cos^4 A - \sin^4 A = \cos^2 A - \sin^2 A$

יב. $\frac{\sin A - \sin^3 A}{\sin^2 (90^\circ - A)} = \sin A$

יג. $\frac{\operatorname{ctg} A}{1 + \cot A} = \frac{1}{\operatorname{tg} A + 1}$

יד. $\frac{1}{\sin A} - \frac{\sin A}{1 + \cos A} = \operatorname{ctg} A$

11. במשולש ABC ($\angle C = 90^\circ$) נתון הניצב a והזווית החדה β .
בטא באמצעותם :

א. את הגובה ליתר

ב. את חוצה הזווית B

ג. את התיכון ליתר.

12. במשולש ABC ($\angle C = 90^\circ$), נתונה הזווית A וחוצה הזווית k .
בטא באמצעותם :

א. את שטח המשולש ב. את רדיוס המעגל החוסם אותו.

13. במשולש MNP ($\angle N = 90^\circ$), נתון הגובה ליתר h והזווית α , שבינו ל- NP .
הבע באמצעות נתונים אלו :

- א. את הניצב MN
 ב. את שטח המשולש
 ג. את חוצה הזווית M.

14. במשולש ABC ($\angle C = 90^\circ$), נתון התיכון ליתר $CD = m$ והזווית בינו

ובין הניצב $AC - \alpha$. הבע באמצעותם:

- א. את שטח המשולש BDC
 ב. את הגובה ליתר.

15. במשולש שווש ABC ($AB = AC$), נתון הבסיס a וזווית בסיס β .

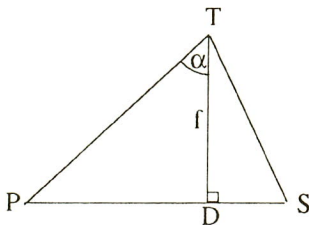
בטא באמצעותם:

- א. את הגובה לשוק.
 ב. את שטח המשולש.
 ג. את חוצה הזווית A.

16. במשולש שווש ABC ($AB = AC$), נתון הגובה לשוק $BD = h$ והזווית בינו

לבין הבסיס γ . בטא באמצעותם:

- א. את הגובה לבסיס
 ב. את שוק המשולש
 ג. את שטח המשולש ABC



17. במשולש שווש PTS ($PT = PS$), נתון הגובה לשוק f - PS והזווית

בינו לבין השוק $PT - \alpha$.

הבע באמצעותם:

- א. את בסיס המשולש TS
 ב. את רדיוס המעגל החוסם
 את המשולש PTD .

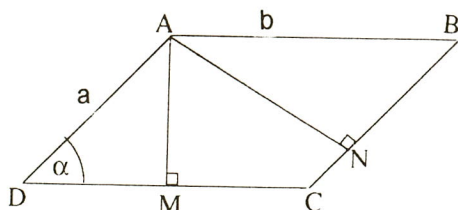
18. במלבן $ABCD$ נתון האלכסון k והזווית בינו לאחת הצלעות α .

בטא באמצעותם:

- א. את צלעות המלבן
 ב. את רוחק הקודקד B מהאלכסון AC
 ג. את שטח המלבן.

19. במלבן נתון האלכסון k והזווית בין האלכסונים α .

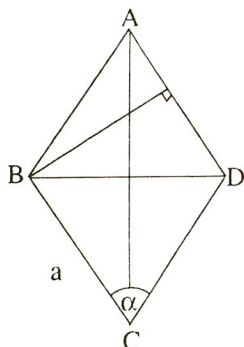
הוכח, כי שטח המלבן שווה ל: $\frac{k^2 \sin \alpha}{2}$



20. במקבילית נתונות שתי צלעות a ו- b וזווית α .
 הבע באמצעות נתונים אלה:
 א. את שטח המקבילית
 ב. את הגבהים AM ו- AN .

21. במקבילית נתונים שני האלכסונים k ו- l והזווית ביניהם α .
 הוכח, כי שטח המקבילית שווה ל: $\frac{k l \sin \alpha}{2}$

22. הוכח, כי שטח מרובע כלשהו שווה למחצית מכפלת אלכסונו בסינוס הזווית שביניהם.

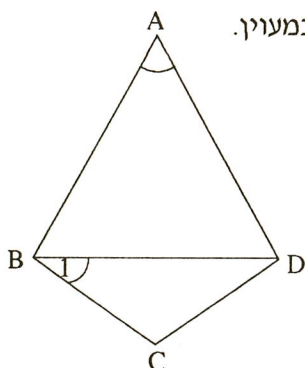


23. במעוין נתונה הצלע a והזווית α .
 בטא באמצעותם:
 א. את אלכסוני המעוין.
 ב. את גובהו.

24. במעוין ABCD נתון אלכסון $BD = k$ וזווית $\angle A = \alpha$.
 הבע באמצעותם את צלע המעוין ואת שטחו.

25. במעוין נתונה הזווית הקהה α והגובה h . בטא באמצעותם:
 א. את צלע המעוין ב. את אלכסונו הקטן ג. את שטחו.

26. במעוין נתונה הצלע a והזווית הקהה β .
 הבע באמצעותם את רדיוס המעגל החסום במעוין.



27. בדלתון ABCD A) ו- C קודקדי הראש. נתון:

- $\angle B = \beta$, $\angle A = 2\alpha$, $BD = m$.
 בטא באמצעותם:
 א. את צלעות הדלתון
 ב. את שטחו.

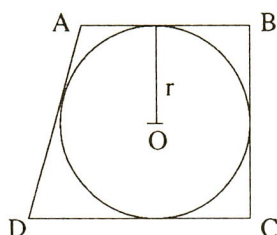
28. בדלתון ABCD (ראה שרטוט קודם). נתון האלכסון הראשי $AC = t$ וזווית $\angle C = \gamma$. הצלעות הבלתי שוות של הדלתון מאונכות זו לזו. הבע את BD באמצעות t ו- γ .

29. בטרפז ישר-זווית ABCD נתון הבסיס הקטן t , השוק הקצרה m והזווית הקהה β . בטא באמצעותם את השוק הארוכה של הטרפז ואת שטחו.

30. בטרפז ישר זווית ABCD (שרטוט כנ"ל), נתון האלכסון הקצר $BD = f$, $\angle DBC = 90^\circ$, $\angle BDC = \alpha$. בטא באמצעות נתונים אלה את שטח הטרפז.

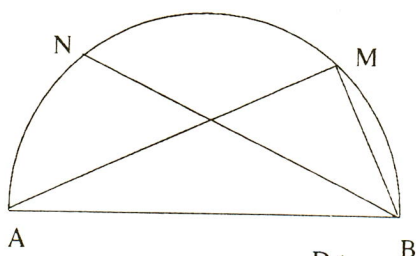
31. בטרפז שוו"ש ABCD ($AB \parallel CD$), נתון הבסיס הקטן a , הגובה h והזווית החדה α . בטא באמצעותם את שטח הטרפז.

32. בטרפז שוו"ש ABCD ($AB \parallel CD$), נתונים הבסיסים a ו- b ($b > a$) והזווית הקהה β . בטא באמצעותם את שטח הטרפז.

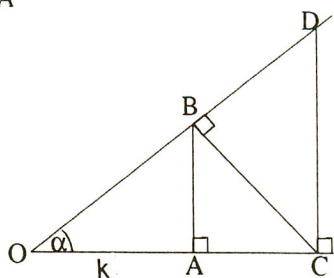


33. בטרפז ישר זווית, בעל זווית קהה $\angle A = \alpha$, חסום מעגל, שמחוגו r . בטא באמצעות הנתונים את שטח הטרפז.

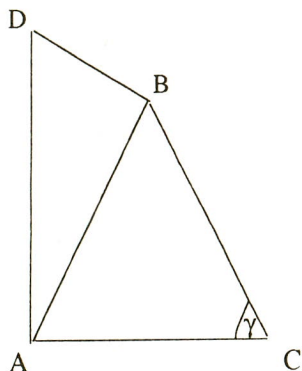
34. טרפז שוו"ש חוסם מעגל שמחוגו r . הזווית החדה β . בטא באמצעות הנתונים את קטע האמצעים בטרפז ואת שטחו.



35. על הקוטר AB של מעגל, בנו משולש AMB. נ - אמצע הקשת AM. נתון: $\angle MAB = \alpha$, $BM = k$. בטא באמצעותם את המיתר BN.



36. נתונה זווית $\angle O = \alpha$ וקטע: $OA = k$. בנקודה A מעלים אנך BA ל- OA . בנקודה B שנוצרה בונים אנך BC ל- OB ובנקודה C שנוצרה, בונים אנך DC ל- OC . בטא את היחס $AB:CD$ באמצעות k ו- α .



37 * במשולש שוו"ש $(AB = BC)$ ABC,

נתון הבסיס a וזווית בסיס γ ;

$DA \perp AC$, $BD \perp AB$.

בטא את שטח המשולש ABD

באמצעות a ו- γ .



38 * במשולש שוו"ש $(AB = AC)$ ABC, נתון הבסיס a וזווית הראש $\angle A = 4\alpha$.

בטא בעזרתם:

א. את רדיוס המעגל O החסום במשולש.

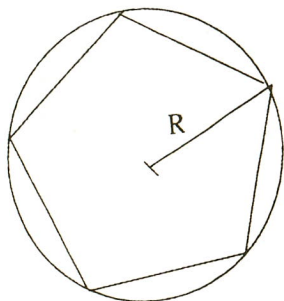
ב. את הקטע OA.



39 במשולש שווה שוקיים כנ"ל, בטא באמצעות אותם נתונים:

א. את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC

ב. את הקטע המחבר את מרכז המעגל החסום עם מרכז המעגל החוסם את המשולש.



40 מחומש משוכלל חסום

במעגל בעל רדיוס R .

בטא את היקף

המחומש ואת שטחו

באמצעות R .

41 מצולע משוכלל, בעל 9 צלעות חסום במעגל. היקף המצולע הוא P .

בטא את רדיוס המעגל ואת שטח המצולע באמצעות P .

42 מעגל שרדיוסו R חסום במצולע משוכלל בן 12 צלעות.

בטא את שטח המצולע באמצעות R .

תשובות



$$(1) \text{ א. } 3.5, \text{ ב. } \frac{1}{3}, \text{ ג. } 1, \text{ ד. } 1, \text{ ה. } 4\sqrt{3}, \text{ ו. } 9, \text{ ז. } 30^\circ, \text{ ח. } 20^\circ, \text{ ט. } 45^\circ$$

$$\cos \alpha = \frac{8}{17}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{8}{15}$$

$$\cos \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}, \operatorname{ctg} \alpha = 4, \operatorname{tg} \alpha = 0.25$$

$$(11) \text{ א. } \sin \beta, \text{ ב. } \frac{a}{\cos \beta/2}, \text{ ג. } \frac{a}{2\cos \beta}$$

$$(12) \text{ א. } 0.5 k^2 \cos^2 \alpha/2 \cdot \operatorname{tg} \alpha, \text{ ב. } \frac{k \cos \alpha/2}{2\cos \alpha}, \text{ ג. } \frac{h}{\sin \alpha}, \text{ ד. } \frac{h^2}{\sin 2\alpha}$$

$$(13) \text{ א. } m \sin 2\alpha, \text{ ב. } m^2 \sin 2\alpha, \text{ ג. } \frac{h}{\sin \alpha \cos \alpha/2}$$

$$(14) \text{ א. } \frac{h}{\sin 2\gamma}, \text{ ב. } \frac{h}{2\sin \gamma}, \text{ ג. } \frac{1}{2} \operatorname{atg} \beta, \text{ ד. } \frac{1}{4} a 2\operatorname{tg} \beta, \text{ ה. } \operatorname{asin} \beta$$

$$(15) \text{ א. } \frac{h^2}{2\sin 2\gamma}, \text{ ב. } \frac{f}{\sin(\alpha/2 + 45^\circ)}, \text{ ג. } \frac{f}{2\cos \alpha}$$

$$(16) \text{ א. } k \sin \alpha, k \cos \alpha, \text{ ב. } k \operatorname{ctg} \alpha, \text{ ג. } \frac{1}{2} k^2 \sin 2\alpha$$

$$(17) \text{ א. } \frac{2\operatorname{asin} \alpha/2}{2\sin \alpha/2}, \text{ ב. } \frac{2\operatorname{acos} \alpha/2}{2\sin \alpha/2}, \text{ ג. } \frac{k}{2\operatorname{tg}^2 \alpha/2}$$

$$(18) \text{ א. } \frac{1}{2} \operatorname{asin} \beta, \text{ ב. } \frac{m}{2\sin \alpha}, \text{ ג. } \frac{m}{2\cos \beta}, \text{ ד. } \frac{1}{4} m^2 (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)$$

$$(19) \text{ א. } t \sin \gamma, \text{ ב. } \frac{m}{\sin \beta}, \text{ ג. } m t - \frac{1}{2} m^2 \operatorname{ctg} \beta$$

$$(20) \text{ א. } \frac{1}{4} f^2 (\sin 2\alpha + 2\operatorname{tg} \alpha), \text{ ב. } a h + h^2 \operatorname{ctg} \alpha, \text{ ג. } \frac{1}{4} (a^2 - b^2) \operatorname{tg} \beta$$

$$(21) \text{ א. } 2r^2 (\operatorname{tg}(\alpha - 90^\circ) + \operatorname{ctg} \alpha/2 + 1)$$

$$(22) \text{ א. } r (\operatorname{tg} \alpha/2 + \operatorname{ctg} \alpha/2), \text{ ב. } 2r^2 (\operatorname{tg} \alpha/2 + \operatorname{ctg} \alpha/2)$$

$$(23) \text{ א. } \frac{k \cos(45^\circ - \alpha/2)}{\sin \alpha}, \text{ ב. } \cos^2 \alpha, \text{ ג. } \frac{a^2}{4\sin 2\gamma}$$

$$(24) \text{ א. } \frac{a \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)}{2\sin 2\alpha}, \text{ ב. } \frac{a}{2\sin 4\alpha}, \text{ ג. } \frac{p}{18\sin 20^\circ}$$

$$(25) \text{ א. } 10R \sin 36^\circ, \text{ ב. } 2.5R^2 \sin 72^\circ, \text{ ג. } \frac{p}{18\sin 20^\circ}$$

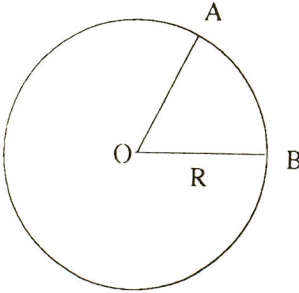
$$(26) \text{ א. } 12R^2 \operatorname{tg} 15^\circ$$

14. המעגל הטריגונומטרי

בתחילת פרק זה, הוצגו הפונקציות הטריגונומטריות במסגרת משולש ישר-זווית, ולכן הזוויות לא חרגו מ- 180° . כללית, הזווית לא חרגה מ- 360° . ניתן להרחיב את הגדרת הזווית, ובהתאם לכך את הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות.

14.1 הרדיאן

מדידת זווית ע"י מעלות איננה שיטת המדידה היחידה. המעלה הוגדרה כמידת זווית בעלת קשת שהיא החלק ה- 360 ממעגל. בענפי מדע שונים משתמשים ביחידת מידה אחרת לזווית - הרדיאן. זו היא מידת זווית מרכזית במעגל שאורך הקשת המתאימה לה (כאשר נמתח אותם לקו ישר), יהיה כאורך רדיוס המעגל.



למשל, הזווית AOB היא זווית בת רדיאן אחד. שכן אם נמתח את הקשת AB עד להיותה קטע, יהיה אורך קטע זה שווה ל- R . במעגל יש 2π זוויות בנות רדיאן אחד כל אחת, שכן היקף המעגל $2\pi R$. לפיכך, זווית בת 360° היא בת 2π רדיאנים, וזווית בת 180° היא בת π רדיאנים, וזווית בת 90° היא בת $\pi/2$ רדיאנים, וכו'.

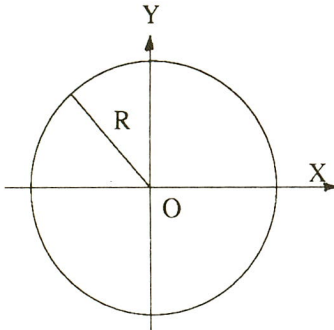
$$\alpha^\circ \rightarrow \pi\alpha/180 \text{ רדיאנים}$$

המעבר ממעלות לרדיאנים נעשה באמצעות הקשר :

$$\text{למשל, } 30^\circ \rightarrow \pi/6 \text{ רדיאנים } (= \pi \cdot 30/180).$$

$$\text{ואילו המעבר מרדיאנים למעלות נעשה באמצעות הקשר: } a \text{ רדיאנים} \rightarrow (180a/\pi)^\circ$$

$$\text{למשל, } 150^\circ (= 180 \cdot 5\pi/6) \rightarrow 5\pi/6 \text{ רדיאנים}$$



14.2 נגדיר מערכת מורכבת משני חלקים:

- **מערכת צירים** ישרת זווית, כאשר

הציר המאוזן הוא ציר ה- x , והציר

המאונך הוא ציר ה- y .

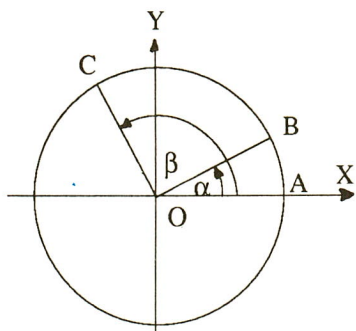
- **מעגל** שמרכזו בראשית הצירים O,

ומחוגו שווה ליחידה אחת.

$$R = 1$$

ארבעת חלקי המישור הנוצרים נקראים

רביעים: רביע ראשון I, רביע שני II, וכו'.



זווית - במערכת זו - מוגדרת באופן כזה,
ששוקה האחת קבועה - הקרן החיובית של ציר ה- x ; השוק האחרת מסתובבת בכיוון מנוגד לכיוון מחוגי השעון.

למשל, $\alpha = \angle AOB$.

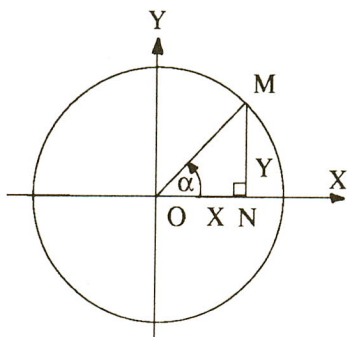
$\beta = \angle AOC$.

השוק המסתובבת של הזווית קובעת את גודל הזווית ואת נקודת החיתוך שלה עם המעגל O (M). משמעות הדבר, שערכי ה- x וה- y של הנקודה M תלויים בגודל הזווית α , כלומר כל אחד מהם הוא פונקציה של α .

14.3 הגדרה: ה- y וה- x של הנקודה, שבה חותכת הקרן המסתובבת את המעגל,

הם **הסינוס והקוסינוס (בהתאמה) של הזווית α :**

$$x = \cos \alpha, \quad y = \sin \alpha$$



הגדרה זו אינה סותרת את הגדרת הסינוס והקוסינוס (סעיף 1.2) לזווית חדה; שכן, לפי הגדרת הסינוס והקוסינוס במשולש MON, שהוא ישר-זווית:

$$\sin \alpha = \frac{MN}{MO} = \frac{y}{R} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \alpha = \frac{NO}{MO} = \frac{x}{R} = \frac{x}{1} = x$$

$$y = \sin x$$

14.4 הפונקציה סינוס

נציג את התאור הגרפי של הפונקציה $y = \sin x$, כאשר הזווית x נמדדת ברדיאנים. לשם כך נבנה מערכת צירים ומעגל

שמחוגו יחידה אחת, כמתואר בשרטוט.

הזווית AKO היא בת x רדיאנים,

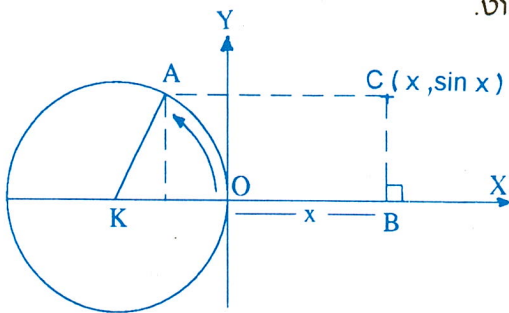
וזה מספר היחידות (R) שמכילה

הקשת AO; לכן, נקצה קטע OB,

שאורכו שווה לאורך הקשת AO.

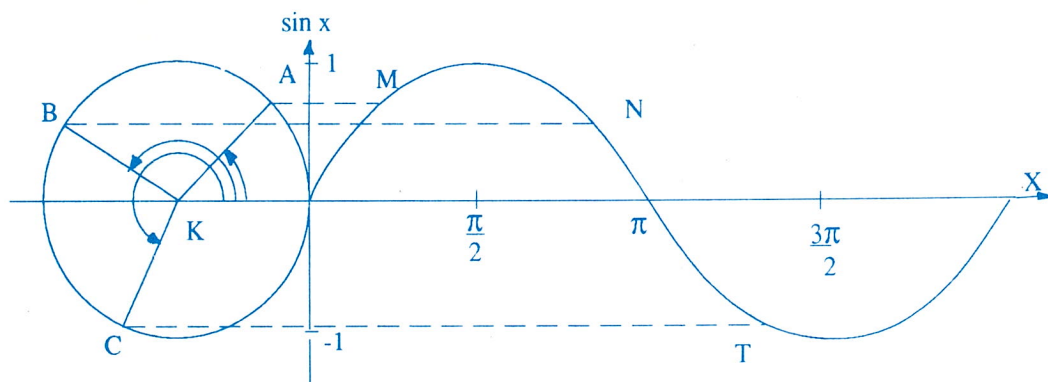
המקבילים לצירים דרך הנקודות

A ו-B נחתכים ב-C.



שעורי נקודה זו הם $C(x, \sin x)$.

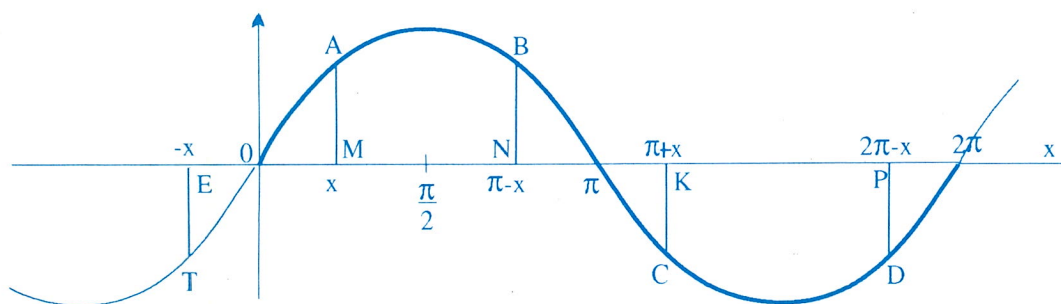
התאמת נקודות בצורה זו לזוויות שערכיהן נעים בתחום $(0, 2\pi)$, יוצרת את גרף פונקצית הסינוס. ערכי הפונקציה נעים בין (-1) ל- 1 .



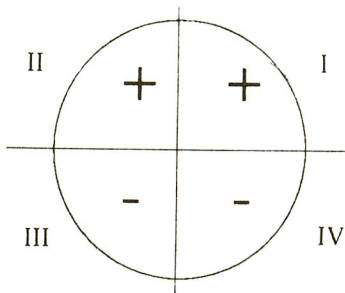
מעיון בגרף הפונקציה מקבלים:

$(BN = AM)$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	*
$(CK = -AM)$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	*
$(DP = -AM)$	$\sin(2\pi - x) = -\sin x$	*

* הפונקציה סימטרית ביחס לראשית הצירים ולכן, זוהי פונקציה אי זוגית, כלומר,
 $(ET = -AM) \quad \sin(-x) = -\sin x$



קטע זה של התאור הגרפי חוזר על עצמו, אם נציב בפונקציה ערכי x בתחום $(2\pi, 4\pi)$ או בתחום $(-2\pi, 0)$, וכו', כלומר:
 * הפונקציה מחזורית עם מחזור 2π : $\sin x = \sin(x + 2\pi k)$ (k שלם)



הסינוס מתאפס בנקודות πk (א שלח)
 * מהגדרת פונקצית הסינוס
 מתקבל, שערכיה חיוביים
 ברביעים הראשון והשני,
 ושליילים ברביעים השלישי
 והרביעי.

14.5 הפונקציה קוסינוס $y = \cos x$

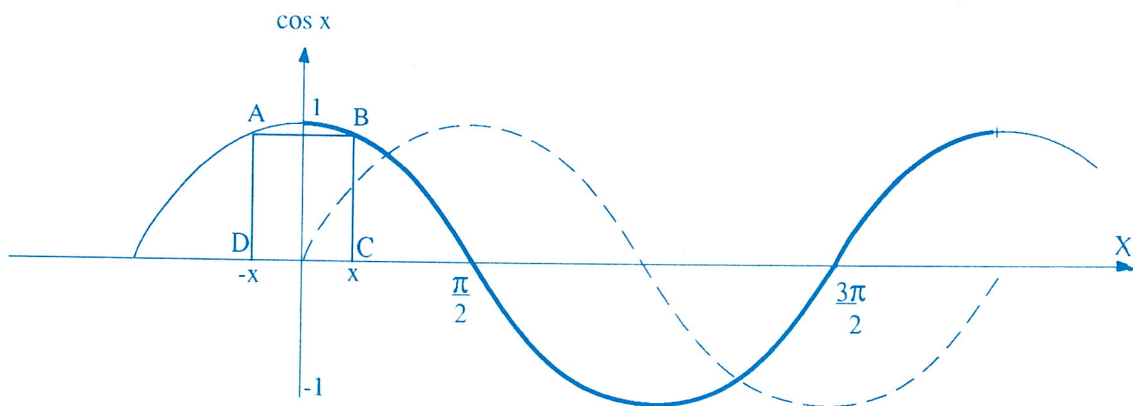
בסעיף 3.2 ראינו את הקשר

$$\sin(\pi/2 - x) = \cos x \quad \text{או} \quad \sin(90^\circ - x) = \cos x$$

$$\sin x = \sin(\pi - x) \quad \text{בסעיף 14.4 קיבלנו}$$

$$\cos x = \sin(\pi/2 - x) = \sin[\pi - (\pi/2 - x)] = \sin(\pi/2 + x) \quad \text{לכן:}$$

פירושו: הזזת גרף פונקצית הסינוס ב- $\pi/2$ נותן את פונקצית הקוסינוס.



מעיון בגרף הפונקציה מתקבלים מספר אפיונים שלה:

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \quad *$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \quad *$$

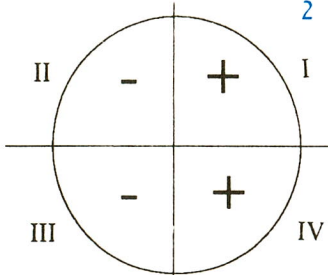
$$\cos(2\pi - x) = \cos x \quad *$$

* הפונקציה זוגית כי, $\cos(-x) = \cos x$

* ערכי הפונקציה נעים בתחום $[-1, 1]$

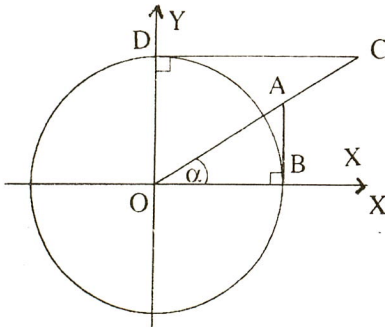
* הפונקציה מחזורית בעלת מחזור 2π : $\cos x = \cos(x + 2\pi k)$ (k שלם)

* הפונקציה מתאפסת בנקודות: $\dots, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots, \frac{\pi k}{2}$ (k שלם)



* ערכי הפונקציה חיוביים ברביעים הראשון והרביעי, ושלישיים ברביעים השני והשלישי.

14.6 הפונקציות טנגנס וקוטנגנס.



נחזור למעגל הטריגונומטרי, שהגדרנו בסעיף 14.2, ונשרטט את המשיקים למעגל הטריגונומטרי בנקודות חיתוכו עם ציר ה- x (B) וציר ה- y (D). משיקים אלו חותכים את המשך השוק המסתובבת של הזווית α . האחד בנקודה A - BA, והשני בנקודה C - DC.

הגדרה: AB ו-CD הם הטנגנס והקוטנגנס, בהתאמה של הזווית α .

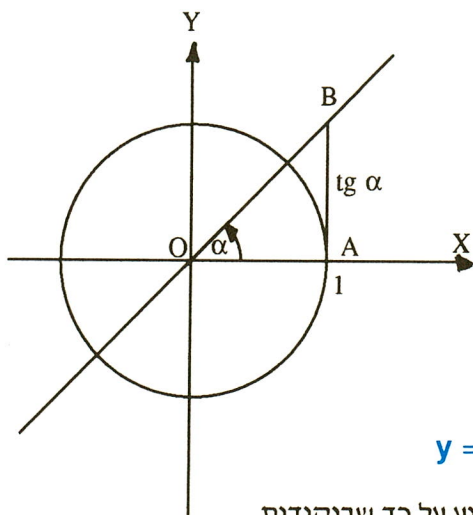
$$AB = \tan \alpha, \quad CD = \cot \alpha$$

הגדרה זו אינה סותרת את הגדרת הפונקציות הללו לזווית חדה; שכן היחס: "ניצב שמול הזווית לניצב שליד הזווית" שביטא את הטנגנס, מתקבל במקרה זה כיחס בין AB לרדיוס שאורכו יחידה אחת. כנ"ל לגבי הקוטנגנס.

מסקנה

שיפוע הישר המונח על השוק המסתובבת של זווית הוא טנגנס הזווית הזו.

הסבר

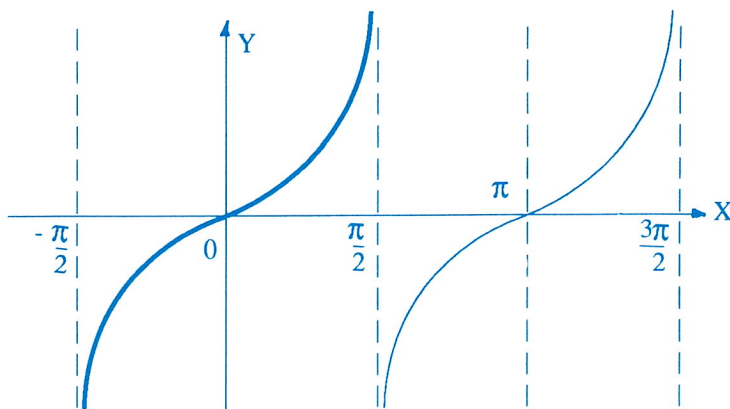


שיפוע של ישר $y = ax$ מוגדר כמידת הגידול של הפונקציה $y = ax$ כאשר מגדילים את ערך ה- x ביחידה אחת. היות שאורכו של OB שווה R (יחידת אורך אחת), הקטע AB , שהוא $\tan \alpha$, הוא מידת הגידול של הפונקציה, ועל כן, השיפוע שלה.

14.7 הפונקציה טנגנס $y = \tan x$

שימוש בזהות $\tan x = \sin x / \cos x$ מצביע על כך שבנקודות $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots, \frac{\pi k}{2}$ הפונקציה לא מוגדרת, שכן ערך הקוסינוס בנקודות אלה הוא אפס.

תוך שימוש בלוח ערכים מקבלים את התאור הגרפי של הפונקציה טנגנס.

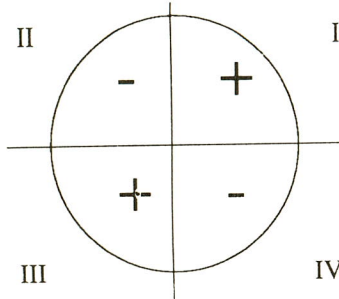
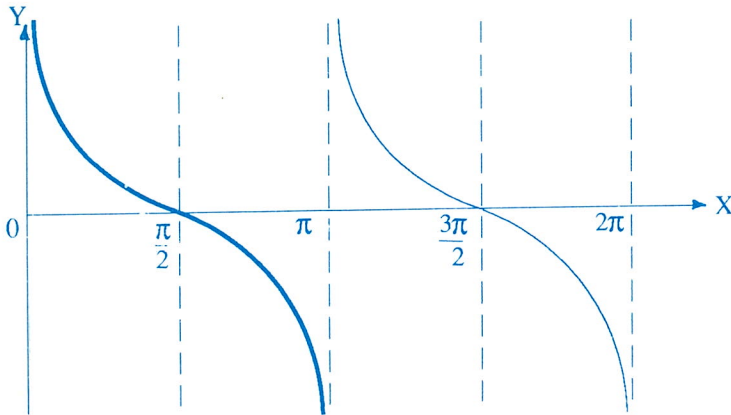


הגרף מלמדנו:

- * הפונקציה מחזורית והמחזור שלה π : $\tan x = \tan(x + \pi k)$ שלם k .
- * הפונקציה מתאפסת בנקודות πk (שלם k)
- * הפונקציה חיובית ברביעים הראשון והשלישי, ושלילית ברביעים השני ורביעי.

14.8 הפונקציה קוטנגנס $y = \text{ctg } x$

הפונקציה קוטנגנס דומה בתכונותיה לפונקציה טנגנס.
שימוש בזהות $\text{ctg } x = \cos x / \sin x$ מצביע על כך, שפונקציה זו אינה מוגדרת
בנקודות $k\pi$ (k מספר שלם), שבהן מתאפס הסינוס.



בעזרת שימוש בנוסחאות
11.3 ו-11.4 מתקבלת
המסקנה ששתי הפונקציות-
טנגנס וקוטנגנס-חיוביות-
ברביעים הראשון והשלישי
ושליליות ברביעים השני
והרביעי.

תרגל את אשר למדת בסעיף זה בעזרת התרגילים הבאים:

1. שרטט כל אחת מהפונקציות שהוזכרו ($y = \sin x$, וכו'). בעזרת לוח ערכים, כאשר הזווית מקבלת ערכים: א. במעלות, ב. ברדיאנים, ובדוק לגבי כל אחד מהתאורים הגרפיים, אם הם משקפים את האיפיונים של כל פונקציה.

2. כנ"ל לגבי $y = \sin 2x$, $y = \cos 2x$

3. כנ"ל לגבי $y = \sin \frac{x}{2}$